Equations plasmiques pour amateurs de machin-choses compliqués.

Fabrice Mottez

11 janvier 2008

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

1.1 Qu'est-ce ?

Il s'agit de notes personnelles sur les calculs en physique des plasmas. Les calculs traités n'ont *a priori* rien d'original, ils ont été publiés ailleurs et n'avaient initialement pour but que de me servir de points de repères. En fait, quand on regarde les calculs présentés dans les livres et dans des cours destinés aux étudiants des universités, on rencontre en général des calculs abrégés. En effet, les éditeurs n'aiment pas les livres trop épais, et les étudiants préfèrent les calculs courts. Les professeurs s'y adaptent : dans leurs exposés, ils souhaitent présenter des concepts et des méthodes de calculs, ils vont rarement au delà. Alors, ils peuvent se permettre de montrer des calculs de quelques lignes dans lesquels des difficultés (parfois techniques, parfois fondamentales) hors de leur propos ont été dissimulées sous le tapis. Dans l'exercice réel de la physique des plasmas, notament pour la conduite de calculs théoriques, il est nécessaire d'être précis et les parties cachées des calculs posent des difficultés : chaque chercheur doit les redécouvrir, et les résoudre. Cela prend du temps ; on est un peu obligé de réinventer la même chose plusieurs fois. Dans les notes qui suivent, je m'efforce de présenter les calculs tels que je les ai compris, sans dissimuler ce qui m'a paru long, difficile ou rébarbatif. Ce n'est pas de la preversité, j'ai comme tout le monde une nette préférence pour les calculs "élégants". Ces notes ne sont donc pas "esthétiques". Mais je les souhaite utiles.

Ces notes portent sur les plasmas non collisionnels. Avant de ne parler que de ceux-ci, on va décrire une sorte de recencement incomplet et désordonné des plasmas dont on sait l'existence. Puis on parlera un peu des collisions, et de l'effet de relaxation d'un plasma collisionnel vers l'équilibre thermodynamique local. Toutes sortes de choses qui n'existent pas chez ces coquins de plasmas non collisionnels.

1.2 Différentes catégories de plasmas

1.2.1 Qu'est-ce qu'un plasma réactif ?

Dans certains plasmas, les rayons ultra-violets, ou les flux d'électrons énergétiques ne contribuent pas seulement à l'ionisation. Ils engendrent des réactions chimiques (par intervention comme constituants, ou par effet catalytique). Ces réactions chimiques peuvent concerner des molécules neutres, ou bien des molécules ionisées.

Les plasmas dans lesquels se produisent des réactions chimiques sont parfois appellés des plasmas réactifs.

La plupart des plasmas rencontrés dans les applications technologiques ou industriels sont réactifs. Dans certains cas, cela est un problème, par exemple dans le cas de la corrosion des électrodes des interupteurs électriques de hautes tension (il y a toujours un petit arc électrique qui se forme lorsque les électrodes se séparent, et ce petit arc est un plasma).

Les plasmas de l'ionosphère sont réactifs. Leur chimie est très étudiée, en particulier la chimie de la couche d'ozone (vers 80 km d'altitude).

1.2.2 Qu'est-ce qu'un plasma thermique ?

Les collisions entre particules peuvent provoquer de l'ionisation si la différence d'énergie entre les particules est assez grande (de l'ordre de quelques eV), ou bien de la recombinaison, si la différence d'énergie est assez faible. Comme dans un même gaz ionisé, les deux formes de collisions peuvent se produire, un équilibre peut s'établir. Le plasma peut alors se maintenir, sans qu'il soit nécessaire d'envoyer des UV, des faisceaux d'électrons ou bien des arcs électriques. Il suffit pour maintenir cet équilibre que le plasma soit assez chaud. Il faut quand même une température de plusieurs dizaines de milliers de degrés ! En effet, l'ecart d'énergie typique entre deux particules dans un plasma de 11000K est de un eV, et il faut plusieurs eV pour les réactions d'ionisation.

On rencontre des plasmas thermiques dans les explosions nucléaires, et dans les étoiles.

1.2.3 Qu'est-ce qu'un plasma relativiste ?

Plus un plasma est chaud, plus les écarts de vitesse entre les particules qui le composent peuvent atteindre de grandes valeurs. Lorsque les vitesses de certaines particules deviennent relativistes, de nouveaux effets se produisent. On dit que ces plasmas sont relativistes.

En général, les électrons sont les particules dont les mouvements désordonnés (mouvements d'agitation thermique) sont les plus rapides. C'est donc les électrons qui produisent des effets relativistes.

Dans les plasmas de l'environnement terrestre, les effets relativistes sont en général assez faibles. Il existe cependant des cas ou ceux-ci ne peuvent être négligés.

Au fait, pourquoi ne parle-on pas de gaz relativiste ?

1.2.4 Qu'est-ce qu'un plasma collisionnel ?

Un plasma collisionnel est un plasma ou, comme dans les gaz ordinaires, les collisions entre particules sont extrèment fréquentes. On mesure la quantité de collisions soit en comptant le nombre de collisions qu'une particule subira en moyenne à chaque seconde (c'est la fréquence de collisions), ou par la distance moyenne parcourue entre deux collisions (c'est le libre parcours moyen).

Tous les fluides collisionnels (gaz neutres, ionisés, plasmas) ont une propriété très importante. Examinons une petite portion d'espace, et mesurons (par la pensée) l'énergie de chaque particule. La répartition statistique en énergie E des particules tend toujours vers une fonction de la forme f(E)= exponentielle(-E/kT), où k est la constante de Boltzmann,et T la température locale.

Cette loi, dite loi de Boltzmann, a de nombreuses conséquences très importantes. Notamment, on peut en déduire que la connaissance en chaque point de l'espace, de la densité, de la vitesse et de la température du fluide permet de le décrire complètement, et en particulier d'en connaitre son mouvement. C'est le fondement des euqations de la dynamique des fluides : celles-ci ne font en effet intervenir que la densité, la vitesse et la température (la pression se déduit des autres paramètre via la fonction d'état).

Le fait que l'on puisse définir localament une température (unique) à l'aide d'une loi statistique comme la loi de Boltzmann s'exprime en disant que les fluides collisionnels sont en équilibre thermodynamique local.

Presque tous les plasmas utilisés dans l'industrie sont collisionnels.

Les plasmas de l'ionosphère sont collisionnels.

1.2.5 Quelles sont les particularités d'un plasma non collisionnel ?

Un plasma non collisionnel est un plasma où les collisions sont si rares qu'elles peuvent être négligées. Cela se produit par exemple lorsque le libre parcours moyen est de l'ordre ou plus grand que les dimensions caractéristiques du plasma.

Le plasmas du vent solaire, le plasma de la magnétosphère, et le plasma qui s'echappe de l'ionosphère sont non collisionnels. Le libre parcours moyen du plasma magnétosphérique est de l'ordre de plusieurs dizaines de milliers de kilomètres. Le plasma de la couronne soalire est faiblement collisionnel : une particule du vent solaire aura subi une vingtaine de collisions en traversant la couronne.

La loi de Boltzmann n'est plus vraie dans le cas des plasmas non collisionnels. La connaissance de la densité, de la vitesse et de la température ne suffit plus pour décrire un plasma non collisionnel, ou pour prévoir son évolution. On dit que de tels plasmas sont hors équilibre thermodynamique local.

Entre autres particularités, on peut mélanger deux plasmas non collisionnels de températures différentes, sans qu'ils évoluent vers un plasma des température unique, vérifiant une loi de Boltzmann. Un peu comme si on mélangeait de l'eau chaude et de l'eau froide dans une baignoire sans que cela fasse de l'eau tiède.

C'est ce qui se passe lorsque le plasma ionosphérique (froid, seulement 10^4K !) et le plasma du vent solaire (chaud, un million de K) se mélangent dans la magnétosphère. Cela ne fait pas un plasma tiède.

Il est néanmoins possible de définir une température dans un plasma non collisionnel : c'est l'écart type de la fonction de distribution en vitesses. Au cas ou le plasma non collisionnel est en equilibre thermodynamique local (ce n'est pas obligatoire, mais cela peut arriver), les deux températures (Boltzmann et ecart type) coincident. Dans le cas hors de l'équilibre thermodynamique, la température (écart type) existe, mais elle ne suffit pas, avec la densité et la vitesse, à prévoir l'évolution du plasma.

Pour qu'un plasma soit réactif ou thermique, il faut qu'il y ait des collisions entre les particules. Un plasma non collisionnel n'est donc ni réactif, ni thermique.

1.3 L'évolution de la fonction de distribution en vitesse d'un fluide collisionnel

Dans un gaz ou un plasma collisionnels, on peut considérer que la durée entre deux collisions est trop courte pour que des forces agissant à grande distance (champ magnétique, champ électrique) modifient de façon notable la trajectoire des particules. Alors la vitesse des particules n'est modifiée que lors de collisions, au cours desquelles elle change brutalement, de manière presque discontinue. Dans un fluide collisionnel, la vitesse d'une particule à un instant donné est donc sa vitesse initiale plus la somme d'un nombre très élevé de petits sauts. La valeur de chaque saut est indépendante de la valeur du saut précédent, puisque deux collisions binaires qui se suivent font forcément intervenir trois particules dont les vitesses initiales sont indépendantes.

Peut-on déduire de cette remarque la valeur asymptotique de la fonction de distribution en vitesses du fluide ?

1.3.1 Le théorème de la limite centrale

Un théorème très important, et pas vraiment facile à démontrer nous permet de répondre. Il s'agit du *théorème de la limite centrale* : Lorsqu'une distribution évolue par un grand nombre de petits pas aléatoires et indépendants, alors la distribution de la somme des petits pas (c'est à dire dans notre cas la distribution en vitesses) tends vers une fonction gaussienne. Ce résultat est indépendant de la loi de probabilité régissant la distribution des petits pas, et de la fonction de distribution initiale.

Pour mémoire une fonction de distribution gaussienne, ici représentée pour une variable aléatoire vectorielle $\vec{\mathbf{u}}$ s'écrit

$$f(u) = \frac{f_0}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp -\frac{1}{2}\left(\frac{\vec{\mathbf{u}} - \vec{\mathbf{m}}}{\sigma}\right)^2 \tag{1.1}$$

où f_0 est l'intégrale de f, c'est à dire le moment d'ordre 0, $\vec{\mathbf{m}}$ est la moyenne (i.e. un moment d'ordre 1) et σ est l'écart quadratique moyen (moment d'ordre 2).

Le temps nécéssaire pour qu'une distribution tende vers la distribution gaussienne n'est pas nécessairement nul. Ce temps s'appelle le temps de relaxation. Lorsque la fréquence de collisions est très supérieure aux fréquences des autres phénomènes, on peut considérer que le temps de relaxation est négligeable et étudier le fluide comme si les fonctions de distributions étaient gaussiennes. On dira qu'un fluide est fortement collisionnel si le temps de relaxation est négligeable.

1.3.2 Conséquence sur le nombre nécessaire d'équations fluides

En termes de physique, on sait que l'intégrale de la distribution en vitesses est la densité n :

$$n = \int f(\vec{\mathbf{u}}) d\vec{\mathbf{u}}. \tag{1.2}$$

La valeur moyenne de la distribution des vitesses est la vitesse moyenne $\vec{\mathbf{v}}$ du fluide (celle qu'on trouve dans les équations fluide), c'est le moment d'ordre 1 de la distribution :

$$\vec{\mathbf{v}} = \int \vec{\mathbf{u}} f(\vec{\mathbf{u}}) d\vec{\mathbf{u}}. \tag{1.3}$$

L'écart type de la distribution représente la vitesse quadratique moyenne $\sqrt{2}v_t$ des particules du gaz, on appelle v_t la vitesse thermique, c'est un moment d'ordre 2 de la distribution :

$$\vec{\mathbf{v}}_t^2 = \int (\vec{\mathbf{u}} - \vec{\mathbf{v}})^2 f(\vec{\mathbf{u}}) d\vec{\mathbf{u}}. \tag{1.4}$$

La vitesse thermique est, au facteur $m/2$ près la valeur typique de l'énergie cinétique d'agitation des particules, c'est à dire, sa température, puisque par définition de la température $kT = \frac{1}{2} m v_t^2$. La distribution gaussienne exprimée à l'aide des paramètres physiques du fluide s'appelle la *distribution de Maxwell-Boltzmann* :

$$f(u) = \frac{n}{v_t \sqrt{2\pi}} \exp - \left(\frac{\vec{\mathbf{u}} - \vec{\mathbf{v}}}{v_t} \right)^2 = \frac{n_0}{\sqrt{2\pi k T}} \exp - \frac{m(\vec{\mathbf{u}} - \vec{\mathbf{v}})^2}{2kT} \tag{1.5}$$

Donc, avec les trois premiers moments de la fonction de distribution, on connait la densité, la vitesse moyenne du fluide et sa température.

La relation 1.5 nous montre, comme la théorie statistique nous l'a appris, que lorsque l'on connait les trois premiers moments d'une fonction de distribution gaussienne, on les connait tous, c'est une des particularités importantes de la distribution gaussienne. Les moments d'ordre 0,1,2 apparaissent explicitement dans la définition de la distribution. Un calcul simple montre que le moment d'ordre trois d'une distribution gaussienne est nul.

Donc, pour un gaz collisionnel, la connaissance de sa densité, de sa vitesse moyenne et de sa température permet de connaitre tous les autres moments.

C'est pourquoi trois équations fluides suffisent à décrire l'évolution d'un fluide collisionnel.

Voici quelques exemples de systèmes d'équations valable pour des fluides collisionnels. On peut les démontrer en calculant les trois premiers moments de l'équation de Boltzmann

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e_s}{m_s}(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})\frac{\partial f_s}{\partial \mathbf{v}} = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{collisions}} \tag{1.6}$$

1.3.3 Equations multi-fluides d'un plasma collisionnel

Pour chaque espèce s, l'équation sur le moment d'ordre 0 est l'équation de conservation

$$\frac{\partial n_s}{\partial t} + \nabla \cdot (n_s \vec{\mathbf{v}}_s) = 0. \tag{1.7}$$

Le membre de droite est nul à condition qu'il n'y ait pas de réaction chimique qui fasse changer le nombre de particules de l'espèce s. L'équation de transport porte sur le premier moment (la vitesse)

$$\begin{aligned} n_s m_s \frac{d}{dt}(\vec{\mathbf{v}}_s) &= (\frac{\partial}{\partial t} + \vec{\mathbf{v}}_s \cdot \nabla)(n_s m_s \vec{\mathbf{v}}_s) \qquad (1.8)\\ &= \vec{\mathbf{E}}_s + \vec{\mathbf{v}}_s \times \vec{\mathbf{B}} - \nabla \cdot \vec{\vec{\mathbf{p}}}_s + \eta_s \nabla^2 \vec{\mathbf{v}}_s - \sum_r n_s m_s \nu_{sr} \rho(\vec{\mathbf{v}}_s - \vec{\mathbf{v}}_r). \end{aligned}$$

La pression cinétique $\vec{\vec{\mathbf{p}}}$ est un moment d'ordre 2, c'est le tenseur d'ordre 2 (matrice 3×3) défini par

$$\vec{\vec{\mathbf{p}}}_s = \int (\vec{\mathbf{u}} - \vec{\mathbf{v}}_s)(\vec{\mathbf{u}} - \vec{\mathbf{v}}_s) f(\vec{\mathbf{u}}) d\vec{\mathbf{u}}, \tag{1.9}$$

cette pression ne concerne que le mouvement libre des particules, et pas leurs interactions, c'est pourquoi on l'appelle la pression cinétique (et non pas la pression totale). Dans le cas d'un gaz collisionnel, le tenseur de pression cinétique se réduit à un scalaire $\vec{\vec{\mathbf{p}}}_s = p_s \vec{\vec{\mathbf{I}}}$ [1] et l'équation sur le moment d'ordre 1 devient :

$$(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{\mathbf{v}}_s \cdot \nabla)(n_s m_s \vec{\mathbf{v}}_s) = \vec{\mathbf{E}}_s + \vec{\mathbf{v}}_s \times \vec{\mathbf{B}} - \nabla p_s + \eta_s \nabla^2 \vec{\mathbf{v}}_s - \sum_r n_s m_s \nu_{sr} \rho(\vec{\mathbf{v}}_s - \vec{\mathbf{v}}_r). \tag{1.10}$$

Les collisions apparaissent dans le terme de collisions avec d'autres espèces r, et éventuellement dans le terme de viscosité. Bien souvent, l'effet de la viscosité est négligeable devant les deux autres.

L'équation portant sur le moment du second ordre (la pression cinétique) est une équation de transport de l'énergie

$$\partial_t \vec{\vec{\mathbf{p}}}_s + \nabla \cdot (\vec{\mathbf{v}}_s \vec{\vec{\mathbf{p}}}_s + \vec{\vec{\vec{\mathbf{Q}}}}_s) + \left[\vec{\vec{\mathbf{p}}}_s \cdot \nabla v_s + \frac{e_s \vec{\mathbf{B}}}{m_s} \times \vec{\vec{\mathbf{p}}} + \text{transposé} \right] = +\vec{\vec{\mathbf{p}}}_{\text{collisions}}. \tag{1.11}$$

Cette équation fait intervenir un tenseur d'ordre 3, le flux de chaleur qui est défini comme le troisième moment de la fonction de distribution :

$$\vec{\vec{\vec{\mathbf{Q}}}}_s = \int (\vec{\mathbf{u}} - \vec{\mathbf{v}}_s)(\vec{\mathbf{u}} - \vec{\mathbf{v}}_s)(\vec{\mathbf{u}} - \vec{\mathbf{v}}_s) f(\vec{\mathbf{u}}) d\vec{\mathbf{u}}. \tag{1.12}$$

En supposant la pression comme un scalaire, et le flux de chaleur comme un vecteur, ce qui est raisonnable pour un fluide collisionnel, cette équation se simplifie en :

$$\partial_t \left(\frac{n_s m_s}{2} \vec{\mathbf{v}}_s^2 + \frac{3}{2} p_s \right) + \nabla \cdot \left[\vec{\mathbf{v}}_s \frac{n_s m_s}{2} v_s^2 + \vec{\mathbf{v}}_s \frac{5}{2} p_s + \vec{\mathbf{Q}}_s \right] = n_s e_s \vec{\mathbf{v}}_s \cdot \vec{\mathbf{E}}. \tag{1.13}$$

Dans le cas d'un fluide collisionnel, le flux de chaleur $\vec{\vec{\vec{\mathbf{Q}}}}$ qui est le troisième moment de la fonction de distribution est nul. Alors, les équations ci-dessus suffisent à définir la dynamique du fluide.

[1] Dans le cas où la pression cinétique est un tenseur scalaire, p est toujours reliée à la température par la relation suivante, qui sert en fait de définition de la température : $p_s = n_s k T_s$. La pression utilisée en thermodynamique (notons la p^*) inclut la pression cinétique et les effets des collisions entre particules. La relation entre p^* et T est en général plus complexe $p_s^* \neq n_s k T_s$, sauf dans le cas des gaz parfaits où les collisions sont négligées et où $p^* = p$.

1.3.4 Equations MHD d'un plasma collisionnel

Dans le cas d'un plasma collisionnel, les différentes éspèces du plasma auront la même fonction de distribution, et il est plus simple de décrire alors le plasma comme un seul fluide. En faisant la somme des équations multifluides pondérées par la masse de chaque espèce de particules, on obtient les équations sur la masse, la vitesse et la quantité de mouvement. En faisant la somme des équations pondérées par la charge des particules on obtient l'équation de conservation de la charge et de courant. Il faut en outre relier les termes de densité de charge électrique et de courant aux champs electrique et magnétique en employant les équations de Maxwell.

La description Magnéto-Hydro-Dynamique d'un plasma suppose en que : les variations sont lentes et qu'on peut négliger le courant de déplacement dans les équations de Maxwell. Cela permet de simplifier grandement les équations. L'équation sur le premier moment est l'équation de conservation 1.14.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{\mathbf{v}}) = 0, \tag{1.14}$$

où ρ est la densité massique du plasma. L'équation de transport porte sur le premier moment (la vitesse)

$$\rho \frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt} = \rho_e \vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{J}} \times \vec{\mathbf{B}} - \nabla p + \eta \nabla^2 \vec{\mathbf{v}}. \tag{1.15}$$

L'équation sur l'énergie :

$$\partial_t \left(\frac{\rho}{2} \vec{\mathbf{v}}^2 + \frac{3}{2} p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) + \nabla \cdot \left[\vec{\mathbf{v}} \frac{\rho}{2} v^2 + \vec{\mathbf{v}} \frac{5}{2} p + \frac{1}{\mu_0} \vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{Q}}_s \right] = 0. \tag{1.16}$$

Ces équations sont complétées par quelques équations portant sur le champ électromagnétique : l'équation du mouvement (simplifiée)

$$\vec{\mathbf{E}} = -\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}} \tag{1.17}$$

l'équation d'Ampère (simplifiée)

$$\nabla \times \vec{\mathbf{B}} = \mu_0 \vec{\mathbf{J}} \tag{1.18}$$

l'équation de Faraday (d'où on a éliminé le champ électrique)

$$\partial \vec{\mathbf{B}} / \partial t = \nabla \times (\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}}). \tag{1.19}$$

Dans le cas d'un plasma collisionnel, la distribution des particules est gaussienne et $\vec{\mathbf{Q}} = 0$. Les équations ci-dessus forment un système complet.

L'équation portant sur le moment du second ordre est une équation d'état permettant de relier la pression p aux autres grandeurs. On la remplace parfois par une équation plus simple, par exemple l'équation polytropique

$$p/\rho^\gamma = \text{constante}. \tag{1.20}$$

1.3.5 Equations d'un fluide neutre collisionnel

Dans le cas d'un fluide neutre, l'équation sur le premier moment est l'équation de conservation,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{\mathbf{v}}) = 0. \tag{1.21}$$

L'équation sur le second moment est l'équation de Navier-Stokes

$$\rho \frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt} = \rho(\partial_t \vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{v}} \cdot \nabla \vec{\mathbf{v}}) = -\nabla p + \eta \nabla^2 \vec{\mathbf{v}} \tag{1.22}$$

où ρ est la densité massique $\rho = nm$. Le terme dû aux collisions est le terme de viscosité. L'équation portant sur un moment d'ordre deux, l'énergie du fluide, est

$$\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\rho v^2}{2} + \rho\epsilon) = -\nabla \cdot \left[\rho \vec{\mathbf{v}}(\frac{v^2}{2} + \epsilon + \frac{p^*}{\rho}) - \vec{\vec{\sigma}} \cdot \vec{\mathbf{v}} - \vec{\mathbf{Q}}\right] \tag{1.23}$$

où $\rho\epsilon$ est l'énergie interne du fluide, p^* est la pression totale, et $\vec{\vec{\sigma}}$ est un tenseur lié à la viscosité du fluide.

Dans le cas de l'équilibre thermodynamique local, le flux de chaleur $\vec{\mathbf{Q}}$ est nul. Dans le cas ou il existe un gradient de température, (cas de l'écart à l'équilibre thermodynamique local), on évalue le flux de chaleur par le terme de conduction thermique $\vec{\mathbf{Q}} = \chi \nabla T$. Cette approximation qui ne pose pas de gros problème permet de fermer les équations du fluide neutre, c'est à dire que le système formé par les equations 1.21,1.22, et 1.23 est un système complet.

1.4 Fluides collisionnels et équilibre thermodynamique

Lorsqu'on mélange deux fluides collisionnels dans un récipient, par exemple de l'eau chaude et de l'eau froide, la distribution initiale est composée de deux gaussiennes d'écarts type (température) différents et éventuellement de moyennes (vitesses moyennes) différentes. Gràce aux collisions et au théorème de la limite centrale, on sait que cette distribution tendra vers une seule gaussienne, et donc formera un liquide avec une seule température. Dit en termes plus généraux, le théorème de la limite centrale nous dit qu'un mélange de plusieurs fluides collisionnels tendra vers un équilibre thermodynamique local.

La fonction de distribution spatiale des particules n'est pas construite de la même façon que la fonction de distribution des vitesses, car la distribution spatiale n'est pas le résultat de petits sauts, et il existe en plus des contraintes imposées de manière permanente et continue : il s'agit des conditions aux limites. Alors, on ne peut appliquer le théorème central limite pour la fonction de distribution spatiale. Ce résultat est en fait évident. Il en découle quand même qu'on ne peut rien dire sur la répartition spatiale de la fonction de distribution des vitesses. C'est pourquoi deux fluides qui se mélangent entrent en équilibre thermodynamique local, et non pas global.

Ainsi, pour un fluide collisionnel, on peut définir en chaque point une vitesse et une température uniques. Si on considère les particules appartenant initialement à la population froide, elles évoluerons vers une distribution gaussienne qui sera (à la densité près) analogue à la distribution des particules qui appartiennent à la population initialement chaude.

Tout ceci parait bien évident et même très banal. Il fallait néanmoins préciser ces choses, car on va voir qu'elles ne s'avèrent pas du tout dans le cas des fluides non-collisionnels.

1.5 L'évolution d'un fluide non collisionnel

Dans un fluide non-collisionnel, la vitesse n'évolue pas par sauts. Elle évolue continuement sous l'effet de forces agissant à grande échelle. Comme ces forces agissent à grande échelle (par rapport à la longueur d'interaction collisionnelle), la variation de vitesse à un moment donné n'est pas indépendante de celle au moment suivant. On ne peut donc pas appliquer le théorème central limite.

Il en résulte que la fonction de distribution en vitesses d'un fluide non collisionnel n'a pas de raison particulière de tendre vers une gaussienne.

Il n'y a donc pas de raison non plus que la connaissance des trois premiers moments de la fonction de distribution des vitesses suffisent à décrire le fluide. Et comme la fonction de distribution n'est pas gaussienne, il n'y a pas de raison que le flux de chaleur $\vec{\vec{\vec{\mathbf{Q}}}}$ soit nul, et on ne peut prédire une forme approchée qui soit valable dans le cas général. Donc si on veut décrire l'évolution d'un fluide non-collisionnel, il faut résoudre un nombre très élevé (*a priori* infini) d'équations portant sur les moments (i.e. de grandeurs macroscopiques) de la distribution du fluide. On aura alors une équation de conservation, une équation de transport de la quantité de mouvement, une équation de transport de l'énergie, une équation de transport du flux de chaleur (c'est le moment d'ordre 3) et ainsi de suite...

Une alternative pour renoncer à cette approche est de recourir à l'équation de Boltzmann, c'est à dire calculer directement la valeur de la fonction de distribution du plasma, et non plus ses moments macroscopiques. C'est l'objet de la théorie cinétique des plasmas.

1.6 Fluides non-collisionnels et thermodynamique

Si on mélange deux fluides non-collisionnels, on n'a aucun théorème qui nous dise qu'ils vont tendre vers un équilibre thermodynamique. Il se peut que les deux fluides interagissent et tendent à avoir la même fonction de distribution, mais rien ne les y oblige en général. C'est ainsi que dans les plasmas spatiaux, on observe au même endroits des plasmas de nature ou d'origine différente, chacun ayant sa propre température, sa propre fonction de distribution qui n'est pas forcément une gaussienne. Bien sur, on peut additionner toutes les distributions pour en faire une seule, et calculer ses moments (densité totale, vitesse totale ou vitesse massique, température) c'est ce qu'on fait en MHD par exemple. Mais cette distribution totale ne sera pas necessairement gaussienne, et la donnée de ses premiers moments (densité, vitesse moyenne, température...) ne suffira pas à la décrire (voir paragraphe précédent).

1.7 L'équation de Vlasov

C'est l'équation de Boltzmann privée de l'opérateur de collisions :

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e_s}{m_s}(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})\frac{\partial f_s}{\partial \mathbf{v}} = 0 \tag{1.24}$$

C'est l'équation fondamentale pour l'étude des plasmas non-collisionnels.

1.8 Les collisions dans les plasmas spatiaux

La description des collisions dans les plasmas spatiaux est assez complexe, il en existe pour chaque type d'interaction, et leur estimation expérimentale est assez délicate car il est difficile de recréer les conditions des plasmas spatiaux dans des caissons à plasmas dans des laboratoires. Quand au calcul théorique, il devient vite assez horrible, en particulier pour les collisions inélastiques où l'on se retrouve vite dans des problèmes de physique atomique relevant de la mécanique quantique. Néanmoins, on dispose à l'heure actuelle de bases de données assez importantes sur les collisions, qu'elles soient élastiques ou inélastiques.

Les collisions élastiques sont les seules qui jouent dans un plasma composé d'électrons et de protons. En présence de neutres, il faut aussi considérer les collisions entre neutres et particules chargées. Les collisions entre neutres ne concernent pas la physique des plasmas spatiaux.

1.8.1 Collisions entre atomes neutres et particules chargées

Une collision électron-atome neutre se produit ainsi : un électron s'approche d'un atome neutre. Le champ électrique produit par l'électron agit sur l'atome en le polarisant. Le champ électrique dipolaire crée par l'atome polarisé agit en retour sur la trajectoire de l'électron ce qui entraine une déviation de la trajectoire des deux particules. La force d'interaction est attractive et dérive d'un potentiel électrique variant en r^{-4}. Si l'électron passe très près de l'atome il faut ajouter des interaction plus complexes qui doivent être décrites au moyen de la physique quantique. Mais dans un plasma peu dense ces interactions à très courte distance sont négligeables.

Pour se donner une idée des ordres de grandeur des fréquences de collisions entre neutres et particules chargées, on peut employer les relations suivantes (Chapman, 1956), valables pour des plasmas peu denses. Elles ont été calculés pour des modélisations de l'ionosphère, mais on peut les étendre en ordre de grandeurs aux autres plasmas spatiaux peu denses.

Pour les collisions ions-neutre de masses semblables (O et O^+ ou H et H^+ par exemple), la fréquence de collisions (en s−1) est

$$\nu_{in} = (2,6 \times 10^{-9})(n_n + n_i)A^{-1/2} \tag{1.25}$$

en s_1, où n_n et n_i sont les densités (en cm^{-3}) des neutres et des ions, et A est la masse moléculaire moyenne des neutres et des ions. Pour les collisions entre électrons et neutres :

$$\nu_{en} = (5,4 \times 10^{-10}) n_n T_e^{-1/2}, \tag{1.26}$$

T_e est la température des électrons en Kelvins.

1.8.2 Collisions entres particules chargées

Le potentiel d'interaction entre deux particules chargées est le potentiel de Coulomb, qui varie en r^{-2}. Ce genre d'interaction est bien décrit, et très connu car traité dans les cours de physique générale. Comme le potentiel d'interaction est en r^{-2}, les interactions se font sur de plus grandes distances qu'une collision neutre-charge (en r^{-4}). Lorsque deux particules chargées interagissent, la trajectoire est d'autant plus déviée, et la quantité de mouvement échangée est d'autant plus grande que les particules ont une énergie voisine. La section efficace d'interaction Coulombienne s'apelle la section efficace de Rutherford.

Une formule donnant l'ordre de grandeur de la fréquence de collision Coulombienne entre électrons et ions dans les plasmas spatiaux :

$$\nu_{en} = [34 + 4,18 \ln (T_e^3/n_e)] n_n T_e^{-3/2}, \tag{1.27}$$

1.8.3 Ionisation des atomes par des photons UV

Enfin, il faut tenir compte des collisions entre photons ultra-violets et atomes neutres, qui peuvent ioniser l'atome si l'énergie des UV dépasse un certain seuil (13,6 eV pour H).

Il y a assez de photons UV dans l'espace interplanétaire pour permettre d'ioniser complèment le gaz interplanétaire dans un rayon de plusieurs unités astronomiques. Néanmoins, la fréquence de collision est assez basse, et un gaz neutre possède une certaine “durée de vie” dans le milieu spatial. Par exemple le gaz neutre émis par une comète lors de son passage au périhélie a le temps de parcourir quelques 10^6 km avant d'être totalement transformé en plasma.

Chapitre 2

Mécanique analytique en vue de l'étude des plasmas

Le chapitre commence par quelques rappels généraux des principes dont on aura besion pour la théorie des invariants, des invariants adiabatiques, et leurs applications à la physique des plasmas.

Dans un premier temps, on présente quelques rappels de la mécanique (classique, non relativiste) dans le formalisme Lagrangien. Celui-ci permet la description d'un système mécanique à l'aide de coordonnées d'espace q les plus générales possibles et de leurs dérivées temporelles $\dot{q}$.

On rappelle ensuite quelques notions fondamentales du formalisme Hamiltonien. Celui-ci permet la description d'un système mécanique à partir de coordonnées d'espace (les plus générales possibles) et les impulsions généralisées qui leurs sont associées. Les impulsions généralisées sont intéressantes, par rapport aux vitesses, parce que leur somme est un invariant pour les systèmes isolés. Un autre intérêt du formalisme Hamiltonien est sa grande simplicité formelle.

2.1 Formalisme lagrangien

La fonction de Lagrange $L(q, \dot{q}, t)$ associée à un sytème dynamique dépend des coordonées spatiales généralisées $q = (q_i)$, des composantes de vitesse généralisées $\dot{q} = (\dot{q}_i), i \in 1, 2, 3$ du ssystème dans l'espace des phases, et du temps. L'*action* S est l'intégrale du lagrangien L en fonction du temps

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q(t), \dot{q}(t), t)dt \tag{2.1}$$

Le principe de moindre action est une sorte d'axiome de la mécanique Lagrangienne. D'après ce principe, l'évolution du système est telle que l'action soit minimale, pour les bornes d'intégration (t_1, q_1) et (t_2, q_2) fixées. L'expression de ce principe en terme d'équation différentielle fourni l'*équation de Lagrange*

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0. \tag{2.2}$$

En termes de coordonées, pour tout i,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0. \tag{2.3}$$

Voici la démonstration de 2.2 : Soient deux chemins $q'(t)$ et $q(t)$ tels que $q'(t_1) = q(t_1)$ et $q'(t_2) = q(t_2)$, soient $h(t) = q'(t) - q(t)$ la différence des chemins et δS la différence des actions associées à q' et q. D'après le principe de moindre action, δS doit être nulle :

$$\delta S = \int (\frac{\partial L}{\partial q} h + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{dh}{dt})dt = 0. \tag{2.4}$$

Une intégration par parties du second terme de l'intégrale permet d'écrire

$$\delta S = \int (\frac{\partial L}{\partial q} + \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}))hdt - \left[h\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right]_{t1}^{t2} = 0. \tag{2.5}$$

Comme q et q' ont les mêmes valeurs aux bornes, $h(t_1) = h(t_2) = 0$; le terme de droite est nul. Alors l'intégrale doit être nulle, pour toute différence de chemins infinitésimale h. Le facteur de h dans l'intégrale doit donc être nul, d'où l'équation 2.2. Réciproquement, si l'équation 2.2 est vérifiée, le principe de moindre action est respecté.

On définit les impulsions généralisées

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \tag{2.6}$$

et les forces généralisées

$$F_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} \tag{2.7}$$

Les équations de Lagrange d'écrivent alors

$$F_i = \dot{p}_i \tag{2.8}$$

Pour un système isolé, par définition, la somme des forces est nulle. Donc l'impulsion généralisée totale est un invariant. Lorsqu'on exprime (2.8) en coordonnées cartésiennes, on retrouve le théorème fondamental de la dynamique tel qu'on l'a appris quand on était petit.

2.2 Multiplicité des Lagrangiens permettant de décrire un système dynamique

Il existe plusieurs lagrangiens permettant de décrire un système dynamique. Considérons par exemple un lagrangien qui serait de la forme $dF(q,t)/dt$. L'action associée est $[F(q,t)]_{t_1}^{t_2}$. Pour des bornes (t_1, q_1), (t_2, q_2) fixées, elle est indépendante de $q(t)$ pour $t_1 < t < t_2$. Donc, si L décrit un système, $L' = L + dF(q,t)/dt$ a son minimum pour le même chemin, donc L' décrit la même évolution que L, et suit donc la même équation dynamique 2.2. Il existe d'autres moyens de construire de nouveaux langrangiens pour la description d'un même système. Par exemple les lagrangiens L et $L' = L - \frac{d}{dt}(q\frac{\partial L}{\partial \dot{q}})$ sont équivalents. Ou bien encore la famille de Lagrangiens $L = \dot{q}\int^{\dot{q}} \frac{du}{u^2} F[u^2/2 + V(q)]$ conduit à l'équation $\ddot{q} = -\frac{dV}{dq}$, quelque soit la fonction non constante F. Ces changements de langrangiens ne sont pas sans importance. Certets, ils aboutissent tous aux mêmes équations dynamiques, mais les implusions généralisées p associées peuvent être différentes. Nous verrons dans la section suivantes que les équations de Hamilton associées dépendent donc de variables p différentes, ce qui permet des changements de variables dit "canoniques" pour les équations de Hamilton.

2.3 Formalisme Hamiltonien

On peut déduire les équations de Hamilton à partir du formalisme lagrangien. Le jeu consiste à éliminer les vitesses généralisées $\dot{q}$ quitte à faire apparaître les impulsions généralisées définies en (2.6).

La différentielle du Lagrangien contient une différentielle de $\dot{q}$

$$dL = \frac{\partial L}{\partial t} + \frac{\partial L}{\partial q} dq + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} d\dot{q} = \frac{\partial L}{\partial t} + \dot{p} dq + p d\dot{q}.$$

Dans cette expression, on a employé l'équation de Lagrange (2.2) et la définition de l'impulsion généralisée (2.6), de manière à ce que celle-ci apparaisse le plus possible. Pour faire disparaitre $\dot{q}$, on peut retrancher L à la différentielle $d(p\dot{q})$.

$$d(p\dot{q} - L) = -\frac{\partial L}{\partial t} dt - \dot{p} dq + \dot{q} dp$$

On verra que $p\dot{q} - L$ correspond, lorsque le système est fermé, à l'énergie, définie en (2.21). On appelle cette grandeur le Hamiltonien, on la note H

$$H(p, q, t) = p\dot{q} - L(q, \dot{q}, t) \tag{2.9}$$

Cette relation s'appelle une transformée de Legendre par rapport à la variable $\dot{q}$. Le Hamiltonien H ne dépend que de q, de p et du temps t, et

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \quad \text{et } \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \quad \text{et } \frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial t} \tag{2.10}$$

Les deux premières équations sont appelées les *équations canoniques*. Remarquons que dans la relation sur les dérivées par rapport au temps, la dérivée du lagrangien L se fait à q et $\dot{q}$ constants, tandis que la dérivée du hamiltonien H se fait à q et p constants.

La transformée de Legendre est-elle toujours possible ? Pour cela, il faut pouvoir éliminier la variable $\dot{q}$ de la définition de H. Comme on connait L, si on parvient à exprimer $\dot{q}$ en fonction de p (et de q et t qui sont communes aux deux représentations) à partir de la relation $p = \frac{\partial}{\partial \dot{q}} L$, alors la transformation peut être réalisée de façon explicite.

2.3.1 Cas où le système dépend de paramètres extérieurs

Il se peut qu'en plus de dépendre des variables dynamiques (p, q ou $q, \dot{q}$), le système dépendent de paramètres λ qui caractérisent sa configuration, ou bien des champs extérieurs. Ces paramètres λ peuvent varier dans le temps.

Alors, le Lagrangien L dépend de λ. En reprenant le raisonnement précédent, il faut ajouter aux équations canoniques la relation

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = -\frac{\partial H}{\partial \lambda} \tag{2.11}$$

2.4 Reciprocité du lien entre les principes Hamiltoniens et Lagrangiens

On vient de déduire les équations de Hamilton de celles de Lagrange, elles mêmes déduites du principe de moindre action. Réciproquement, on peut *dans certains cas* associer un Lagrangien à un système défini par les équations de Hamilton, et retrouver le principe de moindre action, cette fois-ci comme *conséquence* des équations de Hamilton. Associons à H le langrangien $L(q, \dot{q}, t) = p\dot{q} - H(p, q, t)$. Cela est possible si on peut exprimer p en fonction de $q, \dot{q}, t$, car ce sont les variables associées au lagrangien. A cette condition, on peut passer d'une description Hamiltonienne à une desscription Laplacienne. Voici comment on retrouve l'équation de Lagrange : D'après la transformée de Legendre, $\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}}L = dp/dt$, et une équation de Hamilton montre que c'est $-\frac{\partial}{\partial q}H$. La transformée de Legendre montre que c'est aussi $+\frac{\partial}{\partial q}L$. Puisque l'équation de Laplace est vérifiée, on en déduit la validité du principe de moindre action.

La transformée de Legendre vers le formalisme Hamiltonien est-elle toujours possible ? Pour cela, il faut pouvoir éliminier la variable p de la définition de L. Comme on connait H, si on parvient à exprimer p en fonction de $\dot{q}$ (et q et t qui sont communes aux deux représentations) à partir de la relation $\dot{q} = \frac{\partial}{\partial p}H$, alors la transformation est pratiquable. Sinon, la définition peut être possible, mais on sans une définition explicite de $L(q, \dot{q}, t)$.

Une étude plus sytématique des transformées de Legendre (qu'on peut définir pour de larges classes de fonctions) montre que si la fonction est convexe par rapport à la variable $\dot{q}$, alors la transformée de legendre est possible. La fonction de p obtenue est alors convexe, et on peut à nouveau en faire la transformée de Legendre. De plus, la transformée de Legendre est involutive : elle est son propre inverse. Donc la transformée de Legendre d'un lagrangien donne un hamiltonien. La transformée de legendre de cet hamiltonien donne le lagrangien de départ.

Dans le cas de la mécanique, L et H ne dépendent de $\dot{q}$ et de p que sous forme quadratique. Les fonctions quadratiques sont convexes, le passage entre les formalismes hamiltonien et lagrangien est donc toujours possible, dans les deux sens (même si on ne peut pas forcément écrire L et H sous forme explicite).

2.5 Lagrangien et Hamiltonien d'un système isolé, régi par des forces dérivant d'un potentiel scalaire

On appelle système isolé un système qui n'est soumis à aucune force exterieure. La fonction de Lagrange d'un point isolé est son énergie cinétique $mv^2/2$. Pour un système fermé de N points matériels $a \in 1, ..., N$, la fonction de Lagrange est la somme des fonctions de Lagrange de chaque point (somme des énergies cinétiques) moins un terme d'interaction $U(r_1, ..., r_{3N})$ qui ne dépend que des coordonées d'espace r de N points (3 coordonées par point). La fonction U est déterminée par la nature de l'interaction entre les points, c'est l'énergie potentielle ; le Lagrangien est donc l'énergie cinétique moins l'énergie potentielle. Dans ce genre de système, le principe de moindre action stipule donc que le système évolue de manière à minimiser l'écart entre les intégrales (par rapport au temps) des énergies cinétique et potentielle. En coordonées cartésiennes :

$$L(r, \dot{r}, t) = \sum_a \frac{mv_a^2}{2} - U(r_1, r_2, ..., r_3N). \tag{2.12}$$

En coordonnées généralisées, $(q_i, \dot{q}_i), i \in 1, ..., 3N$, le Lagrangien se met toujours sous la forme :

$$L(q, \dot{q}, t) = \sum_{i,j} a_{i,j}(q)\dot{q}_i\dot{q}_j - U(q). \tag{2.13}$$

Dans le cas où le système est ouvert, l'énergie potentielle dépend du temps :

$$L(q, \dot{q}, t) = \sum_{i,j} a_{i,j}\dot{q}_i\dot{q}_j - U(q, t). \tag{2.14}$$

L'impulsion généralisée est

$$P = \sum_a m_a \vec{\mathbf{v}}_a. \tag{2.15}$$

Un système isolé est une sorte de truc plongé dans un espace avec lequel il n'interagit pas. Dans cet espace vide d'interaction, la notion de d'origine des temps, de position ou d'orientation n'a pas de sens car il n'y a rien de physique (un évènement) par rapport a quoi se repérer (en temps, en position ou en angle). On un système isolé (dans son ensemble) est invariant par rapport au temps, aux translations et aux rotations.

2.6 Lagrangien et Hamiltonien d'une particule chargée

Ici, on s'interesse au cas d'une particule chargée soumise à des forces extérieures electromagnétiques, ou dérivant d'un potentiel. On part de l'équation de Lorentz

$$\frac{d}{dt}m\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{F}} + q(\vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}}) \tag{2.16}$$

où $\vec{\mathbf{F}}$ représente les forces autres qu'électromagnétiques (gravitation, inertie...). Ces forces dérivent en général d'un gradient. On écrira $\vec{\mathbf{F}} = -\nabla U_F$. Ici, $\vec{\mathbf{E}}$, $\vec{\mathbf{B}}$, $\vec{\mathbf{F}}$ représentent des champs définis en tout point de l'espace, et on peut leur associer des opérateurs différentiels ∇... et ∂_t. La vitesse $\vec{\mathbf{v}}$ est ici associée à la particule. Ce n'est pas un champ. Mais dans le formalisme de Lagrange, et dans le formalisme Hamiltonien, la vitesse regroupe trois des composantes de la particule dans l'espace des phases. On peut alors considérer que la vitesse est un champ, au même titre que le champ des rayons vecteurs $\vec{\mathbf{r}}$. Comme $\vec{\mathbf{v}}$ et $\vec{\mathbf{r}}$ sont les composantes dans l'espace des phases, ce sont des grandeurs indépendantes les unes des autres. On peut donc représenter la vitesse comme un champ, mais ses dérivées spatiales sont nulles.

On va tenter de faire apparaitre une grandeur L qui rende (2.16) équivalente à l'équation de Lagrange (2.2). On écrit les champs électrique et magnétique en fonction des potentiels vecteur et électriques

$$\frac{d}{dt}m\vec{\mathbf{v}} = -\nabla U_F + q(-\nabla\phi - \frac{\partial\vec{\mathbf{A}}}{\partial t} + \vec{\mathbf{v}} \times \nabla\times\vec{\mathbf{A}})$$

et d'après la relation vectorielle $\vec{\mathbf{v}} \times \nabla\times\vec{\mathbf{A}} = \nabla\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{v}} - \vec{\mathbf{A}} \times \nabla\times\vec{\mathbf{v}} - \vec{\mathbf{A}} \cdot \nabla v - \vec{\mathbf{v}} \cdot \nabla\vec{\mathbf{A}}$ et du fait que $\vec{\mathbf{v}}$ ne dépend pas des variables d'espace

$$\frac{d}{dt}m\vec{\mathbf{v}} = -\nabla U_F + q(-\nabla\phi - \frac{\partial\vec{\mathbf{A}}}{\partial t} + \nabla\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{v}} - \vec{\mathbf{v}} \cdot \nabla\vec{\mathbf{A}}).$$

Des dérivées totales par rapport au temps apparaissent

$$\frac{d}{dt}m\vec{\mathbf{v}} + q\vec{\mathbf{A}} = \nabla(-q\phi + \vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{v}} - U_F) \tag{2.17}$$

Cette équation correspond à l'équation de Lagrange (avec $\vec{\mathbf{q}} = \vec{\mathbf{r}}$) (2.2), à condition que

$$L = \frac{mv^2}{2} - q\phi + q\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{v}} - U_F \tag{2.18}$$

L'impulsion généralisée associée au Lagrangien est

$$\vec{\mathbf{p}} = m\vec{\mathbf{v}} + q\vec{\mathbf{A}}, \tag{2.19}$$

il est très important de remarquer que l'impulsion ne coïncide pas avec la quantité de mouvement $m\vec{\mathbf{v}}$.

Le Hamiltonien se calcule directement à partir de sa définition (**??**)

$$H = +\frac{mv^2}{2} + q\phi + U_F = +\frac{m(\vec{\mathbf{p}} - q\vec{\mathbf{A}})^2}{2} + q\phi + U_F. \tag{2.20}$$

On reconnait là l'expression de l'énergie de la particule, qui est la somme des énergies cinétique et potentielle. On remarque, en coordonnées classiques, qu'aucune forme d'énergie n'est associée au potenteil vecteur, ce qui est en accord avec le fait que le champ magnétique, qui dérive du potentiel vecteur, ne travaille pas. Mais v n'est pas une variable canonique, on l'exprime donc en fonction de p ; l'expression à droite est canonique. Si on applique les équations d'Hamilton, la première montre que $d_t\vec{\mathbf{q}} = m\vec{\mathbf{v}}$, ce qui indique que $\vec{\mathbf{q}} = m\vec{\mathbf{r}}$, la seconde équation se ramène à l'équation ordinnaire de Lorentz 2.16

2.7 Lois de conservation

Les équations de Lagrange d'un système à N particules possèdent $6N$ degrés de liberté. C'est à dire qu'il y a dans les équations, $6N$ constantes arbitraires. Pour chaque degré de liberté, il est, en principe possible de déduire un invariant, c'est à dire une grandeur, qui contrairement aux coordonnées $q, \dot{q}$, ne varie pas quand le système évolue en fonction du temps. On ne sait pas en général calculer tous les invariants. Il en est trois que l'on peut définir pour tous les systèmes car ils se déduisent de propriétés communes à tous les systèmes liées aux propriétés fondamentales de l'espace, mais pas toujours vérifiées, cela dépend des sym'etries du problème : invariance (possible) en fonction du temps, par translation dans l'espace, et rotation dans l'espace. *Les lois de conservation associées aux propriétés de l'espace s'appliquent aux systèmes fermés.* Elles s'appliquent aussi en partie à des sytèmes ouverts, pourvu que leur Lagrangien présente certaines symétries.

Nous démontrerons en outre le théorème de Liouville.

2.7.1 Conservation de l'énergie

Si le Lagrangien ne dépend pas du temps, on déduit la conservation de l'énergie. Sachant que le Lagrangien d'un système fermé ne dépend pas explicitement du temps, en le dérivant par rapport au temps,

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i = 0,$$

de (2.3), on déduit

$$\frac{d}{dt}\dot{q}_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L = 0,$$

la grandeur invariante exposée ici est l'énergie totale E du système.

$$E = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L \tag{2.21}$$

On peut la calculer à partir de (2.13), pour un système de points matériels, en coordonées généralisées.

$$E = \sum_{i,j} a_{i,j}(q)\dot{q}_i\dot{q}_j + U(q); \tag{2.22}$$

c'est la somme des énergies cinétiques et de l'énergie potentielle d'interaction.

Dans le cas du mouvement d'une particule chargée, on calcule sans peine

$$E = \frac{mv^2}{2} + q\Phi + U_F. \tag{2.23}$$

2.7.2 Conservation de l'impulsion

L'invariant que l'on étudie dans ce paragraphe se produit lorsque le lagrangien est invariant par translation. Cela se produit en particulier dans le cas d'un système fermé, mais aussi pour une particule dans un champ de forces externes qui est invariant par translation.

On suppose le système invariant dans la direction r_i.

$$\frac{\partial L}{\partial r_i} = 0.$$

D'après les équations de Lagrange,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v_i} = 0.$$

on définit la composante i de l'*impulsion* P_i,

$$P_i = \frac{\partial L}{\partial v_i}, \tag{2.24}$$

P_i est un invariant du mouvement.

Dans le cas d'une invariance suivant toutes les translations (toutes les directions) , on décompose le rayon vecteur sur une base ortogonale $\vec{\mathbf{r}} = \sum_i r_i \vec{\mathbf{e}}_i$. En considérant une translation infinitésimale $\delta\vec{\mathbf{r}}$,

$$\delta L = \sum_i \frac{\partial L}{\partial r_i}\delta r_i = \delta\vec{\mathbf{r}} \cdot \sum_i \frac{\partial L}{\partial r_i}\vec{\mathbf{e}}_i = 0.$$

Toujours en appliquant les équations de Lagrange, on trouve que

$$\delta\vec{\mathbf{r}} \cdot \sum_i \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v_i}\vec{\mathbf{e}}_i = \delta\vec{\mathbf{r}} \cdot \sum_i P_i\vec{\mathbf{e}}_i = 0.$$

$$\vec{\mathbf{P}} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial v_i}\vec{\mathbf{e}}_i \tag{2.25}$$

est un invariant du mouvement.

L'impulsion coïncide souvent avec la quantité de mouvement et on serait tenté de les confondre. Ces deux grandeurs diffèrent néanmoins dans des cas importants, en particulier pour un système donnant lieu à des interactions électromagnétiques.

Dans le cas d'une particule dans un champ de force invariant par une translation suivant une direction x, l'impulsion $P_x = \partial_{\dot{x}} L$ est un invariant.

Dans le cas général $L(q_1.., \dot{q}_i..)$ (où q_i n'est pas nécessairement une coordonnée cartésienne), si L est indépendant de q_i, alors l'impulsion généralisée $p_i = \partial_{\dot{q}_i} L$ est un invariant. La démonstration est analogue à celle donné ci-dessus.

2.7.3 Conservation du moment cinétique

Dans le cas ou le lagrangien est invariant par rotation, on déduit l'invariance du moment cinétique. Par rotation du système d'un angle $\delta\vec{\phi}$, les éléments se déplacent dans l'espace suivant $\delta\vec{\mathbf{r}} = \delta\vec{\phi} \times \vec{\mathbf{r}}$ et en vitesse suivant $\delta\vec{\mathbf{v}} = \delta\vec{\phi} \times \vec{\mathbf{v}}$. L'expression d'invariance du Lagrangien est

$$\delta L = \sum_i \frac{\partial L}{\partial r_i}\delta r_i + \frac{\partial L}{\partial v_i}\delta v_i = 0.$$

En appliquant les équations de Lagrange et en notant p_a l'impulsion (2.25) associée à l'élement a,

$$\sum_a \dot{\vec{\mathbf{p}}}_{\mathbf{a}} \cdot \delta\tilde{\phi} \times \tilde{\mathbf{r}}_{\mathbf{a}} + \tilde{\mathbf{p}}_{\mathbf{a}} \cdot \delta\tilde{\phi} \times \tilde{\mathbf{v}}_{\mathbf{a}} = \mathbf{0}.$$

En permutant circulairement les facteurs des produits mixtes et en factorisant par $\delta\vec{\phi}$,

$$\frac{d}{dt}\sum_a \vec{\mathbf{r}}_a \times p_a = 0.$$

On définit le moment cinétique

$$\vec{\mathbf{M}} = \sum_a \vec{\mathbf{r}}_a \times \vec{\mathbf{p}}_a, \tag{2.26}$$

c'est un invariant pour un système fermé.

2.7.4 Flot dans l'espace des phases, théorème de Liouville

Il existe en outre une loi de conservation valable pour tous les sytèmes décrits par les équations de Hamilton : la conservation du volume dans l'espace des phases, qu'on appelle parfois em théorème de Liouville. Ce n'est pas un invariant exactement de la même nature que les trois précédents, car il ne concerne pas *un seul* ensemble de paramètres décrivant un système hamiltonien, mais le volume associé à un ensemble de paramètres décrivant une multiplicité d'états possibles du système.

L'espace des phases est celui des variables (p, q) associé au système dynamique. Si p et q sont des vecteurs d'un espace à N dimensions, l'espace des phases est de dimension $2N$. On appelle flot (de paramètre t) dans l'espace des phases la transformation

$$f^t : (p(0), q(0) \rightarrow (p(t), q(t)) \tag{2.27}$$

où p, q est solution des équations de Hamilton. L'ensemble de ces transformations est un groupe, ce qui est une bonne nouvelle qui fait chaud au coeur. Plus intéressant, les transformations f^t préservent le volume. Considérons le volume V_0, associé à un domaine D_0 de l'espace des phases,

$$V_0 = \int_{D_0} dp_0 dq_0 \tag{2.28}$$

et lors d'un changement de variables, par exemple des variables (p_0, q_0) vers (p_1, q_1), le domaine D_0 se transforme en un domaine D_1, et le volume associé est

$$V_1 = \int_{D_1} dp_1 dq_1. \tag{2.29}$$

Or, on peut exprimer le volume V_0 en fonction des coordonées (p_1, q_1) grâce au jacobien de la transformation,

$$V_0 = \int_{D_1} dp_1 dq_1 \frac{\partial(p_0, q_0)}{\partial(p_1, q_1)}. \tag{2.30}$$

Calculons ce jacobien, cela permettra une comparaison de V_0 et V_1. Abrégeons : $q_1 = q(t_0 + \delta t)$ etc.

$$q_1 = q_0 + \delta t \frac{\partial p_0}{\partial} H(p_0, q_0, t_0) + o(\delta t) \tag{2.31}$$

$$p_1 = p_0 - \delta t \frac{\partial q_0}{\partial} H(p_0, q_0, t_0) + o(\delta t) \tag{2.32}$$

et le Jacobien de la transformation est

$$\frac{\partial(p_0, q_0)}{\partial(p_1, q_1)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial q_0}{\partial q_1} & \frac{\partial q_0}{\partial p_1} \\ \frac{\partial p_0}{\partial q_1} & \frac{\partial p_0}{\partial p_1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 + \delta t \frac{\partial^2 H}{\partial q_0 \partial p_0} & -\delta t \frac{\partial^2 H}{\partial q_0^2} \\ +\delta t \frac{\partial^2 H}{\partial p_0^2} & 1 - \delta t \frac{\partial^2 H}{\partial q_0 \partial p_0} \end{vmatrix} = 1 + o(\delta t) \tag{2.33}$$

Considérons un intervalle de temps t, on peut le diviser en N intervalles, et l'écart de le jacobien et 1 est de l'ordre de $N(t/N)^2 = t^2/N$, et pour t fini, et N tendant vers l'infini (δt tendant vers 0), cet écart tend vers 0. Alors, pour un écart de temps fini entre les états 0 et 1, $V_1 = V_0$. Un système hamiltonien préserve le volume d'un domaine de l'espace des phases.

Réciproque du théorème de Liouville : il paraît (lu dans un livre) que lors que le flot défini en 2.27 a de bonnes propriétés bien régulières, alors, il est une solution des équations de Hamilton.

2.8 Crochets de Poisson

L'évolution d'une fonction $f(p,q,t)$ par rapport au temps peut se déduire de l'hamiltonien du système :

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial f}{\partial p}\dot{p}. \tag{2.34}$$

L'application des relations de Hamilton (pour $\dot{q}$ et $\dot{p}$) permet d'écrire

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + [H, f], \tag{2.35}$$

où les crochets de Poisson $[H,f]$ sont définis par la relation (plus générale, on n'est pas obligé d'y mettre H)

$$[g, f] = \frac{\partial g}{\partial p}\frac{\partial f}{\partial q} - \frac{\partial g}{\partial q}\frac{\partial f}{\partial p}. \tag{2.36}$$

Les crochets de Poisson sont sujets à quelques symétries

$$[f, g] = -[g, f] \tag{2.37}$$

$$[f_1 + f_2, g] = [f_1, g] + [f_2, g] \tag{2.38}$$

$$[g, f_1 f_2] = [g, f_1]f_2 + [g, f_2]f_1 \tag{2.39}$$

$$[f, [g, h]] + [g, [h, f]] + [h, [f, g]] = 0. \tag{2.40}$$

2.9 Changement de variables canoniques

Considérons un système décrit par les variables (p,q) et la fonction de Hamilton $H(p,q)$, vérifiant les équation de Hamilton 2.10, et de nouvelles variables (P,Q) en fonction desquelles l'Hamiltonien se transforme en une fonction $H'(P,Q)$. On dit que le changement de variables est canonique si H', avec P,Q et H', l'évolution du système est aussi décrite par les équations de Hamilton

$$\dot{Q} = \frac{\partial H}{\partial P} \;\text{ et }\; \dot{P} = -\frac{\partial H}{\partial Q}. \tag{2.41}$$

Evidemment, tous les changement de variables ne sont pas canoniques. Voici une méthode pour en construire, fondée sur l'usage d'une fonction génératrice.

D'après le théorème de Liouville, un changement de variable canonique doit préserver le volume dans l'espace des phases. D'après la réciproque du théorème de Liouville, si la transformation est assez régulière, cela doit même suffire.

La condition s'exprime de manière simple. On suppose une transformation entre les variables (p, q) et (P, Q). Pour préserever le volume dans l'espace des phases, le jacobien doit valoir 1, c'est à dire

$$\frac{\partial(p,q)}{\partial(P,Q)} = \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q} = 1 \tag{2.42}$$

ou, ce qui est équivalent,

$$\frac{\partial(P,Q)}{\partial(p,q)} = \frac{\partial q}{\partial Q}\frac{\partial p}{\partial P} - \frac{\partial q}{\partial P}\frac{\partial p}{\partial Q} = 1. \tag{2.43}$$

Cela nous fournit un moyen de vérifier qu'une transformation est canonique, mais pas une méthode pratique pour en construire une. Pourtant, il existe de telles méthodes, elles se fondent sur l'usage d'une *fonction génératrice.*

En général, une transformation de deux variables est définie par deux fonctions. A cause de la condition de canonicité, traduite ici par la condition de conservation du volume dans l'espace des phases, une seule fonction permet de définir la transformation.

Chapitre 3

Les équations du champ électro-magnétique

3.1 Les équations de Maxwell

Pour décrire les équations du champ électromagnétique dans un plasma, deux approches sont possibles suivant que l'on considère le plasma de l'intérieur en décrivant explicitement le comportement de ses particules ou qu'on le considère comme un tout caractérisé par un tenseur diélectrique. La première approche nous conduit à considérer le plasma comme une assemblée de particules électriques se déplaçant dans le vide. La seconde approche correspond à la description d'un milieu diélectrique.

3.1.1 Forme générale des équations de Maxwell

Les équations de Maxwell sont l'équation de Faraday

$$\nabla \times \vec{\mathbf{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t}, \tag{3.1}$$

l'équation d'Ampère

$$\nabla \times \vec{\mathbf{H}} = \vec{\mathbf{J}} + \frac{\partial \vec{\mathbf{D}}}{\partial t}, \tag{3.2}$$

l'équation de Maxwell-Gauss sur la divergence du champ électrique

$$\nabla \cdot \vec{\mathbf{D}} = \rho, \tag{3.3}$$

et la divergence du champ magnétique

$$\nabla \cdot \vec{\mathbf{B}} = 0. \tag{3.4}$$

Le terme $\frac{\partial \vec{\mathbf{D}}}{\partial t}$ de l'équation d'ampère s'appelle le courant de déplacement. L'équation de continuité de la charge peut se déduire des équations de Maxwell en comparant la divergence de (3.7) et la dérivée temporelle de (3.8) :

$$\nabla \cdot \vec{\mathbf{J}} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \tag{3.5}$$

3.1.2 Forme générale des équations de Maxwell en unités barbares

Voici les équations de Maxwell dans le système d'unités Gaussiennes. Il faut noter que dans ce système, E et B sont homogènes.

$$\nabla \times \vec{\mathbf{E}} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t}, \tag{3.6}$$

l'équation d'Ampère

$$\nabla \times \vec{\mathbf{H}} = \frac{4\pi}{c}\vec{\mathbf{J}} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{\mathbf{D}}}{\partial t}, \tag{3.7}$$

l'équation de Maxwell-Gauss sur la divergence du champ électrique

$$\nabla \cdot \vec{\mathbf{D}} = 4\pi\rho, \tag{3.8}$$

et la divergence du champ magnétique

$$\nabla \cdot \vec{\mathbf{B}} = 0. \tag{3.9}$$

L'équation de continuité ne change pas :

$$\nabla \cdot \vec{\mathbf{J}} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \tag{3.10}$$

3.1.3 Les potentiels scalaire et vecteur

On peut faire apparaitre des intégrales premières des champs électrique et magnétique. Ce sont le potentiel électrique (ou scalaire)Φ et le potentiel vecteur $\vec{\mathbf{A}}$ qui sont tels que

$$\vec{\mathbf{B}} = \nabla \times \vec{\mathbf{A}} \tag{3.11}$$

$$\vec{\mathbf{E}} = -\nabla\Phi - \frac{\partial \vec{\mathbf{A}}}{\partial t} \tag{3.12}$$

Ces potentiels étant des intégrales premières du champ électromagnétique, ils sont définis à une constante près (une par potentiel). On peut donc leur imposer une condition, appellée jauge.

Voici quelques expressions utiles, dont les propriétés font apparaitre l'intérêt de telle ou telle jauge. En réécrivant l'équation d'Ampère 3.33 en éliminant les champs electrique et magnétique avec 3.11 et 3.12 :

$$\nabla\times(\nabla\times\vec{\mathbf{A}}) = \nabla(\nabla\cdot\vec{\mathbf{A}}) - \Delta\vec{\mathbf{A}} = \mu_0\vec{\mathbf{j}} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}(-\nabla\Phi - \frac{\partial\vec{\mathbf{A}}}{\partial t}).$$

En réarrangeant les termes

$$\Delta\vec{\mathbf{A}} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{\mathbf{A}}}{\partial t^2} = -\mu_0\vec{\mathbf{j}} + \nabla(\nabla\cdot\vec{\mathbf{A}} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\Phi}{\partial t}). \tag{3.13}$$

Le même genre de cuisine sur l'équation de Gauss 3.34 mène à

$$-\Delta\Phi - \frac{\partial\nabla\cdot\vec{\mathbf{A}}}{\partial t} = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \tag{3.14}$$

La jauge de Coulomb est définie par

$$\nabla\cdot\vec{\mathbf{A}} = 0. \tag{3.15}$$

Avec la jauge de Coulomb, l'équation du potentiel électrique est particulièrement simple, on retrouve l'expression du potentiel de Coulomb (d'où le nom de la jauge),

$$\Delta\Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}. \tag{3.16}$$

Il n'y a pas de retard dans ce calcul (pas de terme en $(1/c^2)\partial^2_{t^2}$). Par contre, le laplacien du potentiel vecteur contient un terme de retard (il faut bien le retrouver quelque part), et n'est pas indépendant du potentiel électrique.

La jauge de Lorentz est définie par

$$\nabla\cdot\vec{\mathbf{A}} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\Phi}{\partial t} = 0 \tag{3.17}$$

Ce choix a le grand avantage de dissocier les potentiels Φ et $\vec{\mathbf{A}}$ dans leur relation avec les termes sources. En effet, en reprenant les equations 3.13, 3.14 et la jauge 3.17 :

$$\Delta\vec{\mathbf{A}} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{\mathbf{A}}}{\partial t^2} = -\mu_0\vec{\mathbf{j}}, \tag{3.18}$$

$$\Delta\Phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}. \tag{3.19}$$

Lorsque des calculs sont faits dans des jauges différentes, les potentiels ne sont pas tout à fait les mêmes. Si des potentiels $\vec{\mathbf{A}}_1$ et Φ_1 sont associés à une jauge 1, et des potentiels $\vec{\mathbf{A}}_2$ et Φ_2 sont associés à une jauge 2, les relations 3.11 et 3.12 montrent que

$$\nabla\times(\vec{\mathbf{A}}_1 - \vec{\mathbf{A}}_2) = 0 \tag{3.20}$$

$$\nabla(\Phi_1 - \Phi_2) = \frac{\partial}{\partial t}(\vec{\mathbf{A}}_1 - \vec{\mathbf{A}}_2) \tag{3.21}$$

ce qui implique que les potentiels vecteurs ne diffèrent que par le gradient d'un champ scalaire (notons le ψ), et que alors $\nabla(\Phi_1 - \Phi_2 + \partial_t\psi) = 0$. Donc

$$\vec{\mathbf{A}}_1 = \vec{\mathbf{A}}_2 + \nabla\psi \tag{3.22}$$

$$\Phi_1 = \Phi_2 - \partial_t\psi + f(t) \tag{3.23}$$

Ce sont les formules des transformation de jauge. On remarque qu'il y a deux degrés de liberté dans le choix d'une jauge, alors que les jauges ci-dessus n'imposent qu'une seule condition. C'est parce que la seconde condition est sous entendue et triviale : Φ n'apparait que par des dérivées spatiales dans le calcul des champs, donc on suppose implicitement (inconsciement ?) que la composante $f(t)$ qui est spatialement uniforme est nulle.

Le passage de la jauge de Lorentz (disons 1 pour reprendre les notations ci-dessus) à la jauge 3.15 (jauge 2) se fait en choisissant ce qu'on veut pour $f(t)$ (prennons donc $f = 0$). Pour trouver ψ, on combine les définitions des jauges et la formule de passage 3.22 : $\nabla\cdot\vec{\mathbf{A}}_2 = \nabla\cdot(\vec{\mathbf{A}}_1 + \nabla\psi) = -\partial_t\Phi_1 + \Delta\psi$ d'où $\Delta\psi = \partial_t\Phi_1$.

Les relations 3.18 et 3.19 montrent le lien entre la jauge de Lorentz et les termes source. Dans le cas d'une jauge quelconque liée à la jauge de Lorentz par les relations de transformation de jauge 3.22 et 3.23 où A_1 représente la jauge de Lorentz et $A = A_2$ l'autre jauge et $f = 0$,

$$\Delta\vec{\mathbf{A}} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{\mathbf{A}}}{\partial t^2} + \Delta(\nabla\Psi) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\nabla\Psi}{\partial t^2} = -\mu_0\vec{\mathbf{j}}, \tag{3.24}$$

$$\Delta\Phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} - \Delta\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^3\Psi}{\partial t^3} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}. \tag{3.25}$$

3.1.4 Les termes source

La contribution du plasma à l'évolution du champ électromagnétique se fait par le biais de la densité de charge ρ et de la densité de courant $\vec{\mathbf{J}}$ (ce sont les *termes source* des équations de Maxwell).

Ces termes sont reliés par la relation de conservation de la charge

$$\nabla \cdot \vec{\mathbf{J}} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \tag{3.26}$$

Cette équation se démontre en considérant la divergence de 3.33 et 3.34

En général, les termes source sont partagés entre une partie qui dépend des réaction internes (*int*) du plasma, et une partie externe qui correspond à des termes imposés de l'exterieur (*ext*).

$$\vec{\mathbf{J}} = \vec{\mathbf{J}}_{int} + \vec{\mathbf{J}}_{ext}. \tag{3.27}$$

De même, la densité de charge se partage entre une contribution propre au plasma et des termes imposés de l'exterieur :

$$\rho = \rho_{int} + \rho_{ext}. \tag{3.28}$$

Il faut admettre que ce partage entre termes internes et externes est un peu arbitraire, la necessité de ce découpage varie suivant le problème traité. Néanmoins, ce partage n'aura de sens que si $\nabla \cdot \vec{\mathbf{J}}_{int} + \partial \rho_{int}/\partial t = 0$ et $\nabla \cdot \vec{\mathbf{J}}_{ext} + \partial \rho_{ext}/\partial t = 0$.

Le calcul des termes sources se fait à partir de la répartition des particules chargées et de leur vitesse ; ce calcul dépend de la description mécanique du plasma (de type fluide, cinétique, Hamiltonienne...). La question du calcul des termes sources n'est pas abordée dans ce chapitre. On considérera néanmoins, sans les rendre explicites, des relations entre les termes sources et le champ electromagnétique. On s'intéressera ici plus à leur forme qu'à leur contenu. La question de leur contenu sera abordé dans les prochains chapitres.

On arrive bien souvent à exprimer la densité de courant en fonction du champ électrique :

$$\vec{\mathbf{J}}_{int} = \vec{\vec{\sigma}} \cdot \vec{\mathbf{E}}. \tag{3.29}$$

où $\vec{\vec{\sigma}}$ est la conductivité électrique du plasma. Cette équation définit une loi d'Ohm très générale, valable à l'échelle microscopique. Dans des cas très simples, σ est une constante scalaire ou matricielle, mais en général, c'est une fonction non-linéaire de $\vec{\mathbf{E}}$.

La densité de charges est généralement liée au champ électrique par une relation du type

$$\rho_{int} = \nabla \cdot (\vec{\vec{\chi}} \cdot \vec{\mathbf{E}}), \tag{3.30}$$

où $\vec{\vec{\chi}}$ est la susceptibilité diélectrique (une fonction en général).

3.1.5 Le plasma considéré comme une assemblée de charges dans le vide

Ce équations ne font appel qu'au champ électrique $\vec{\mathbf{E}}$ et à l'induction magnétique (abusivement appelée champ magnétique) $\vec{\mathbf{B}}$. C'est le seul cas où les relations entre $\vec{\mathbf{D}}$ et $\vec{\mathbf{E}}$, et $\vec{\mathbf{H}}$ et $\vec{\mathbf{B}}$ sont connues de façon exacte :

$$\vec{\mathbf{D}} = \epsilon_0 \vec{\mathbf{E}}\ ,\ \ \vec{\mathbf{B}} = \mu_0 \vec{\mathbf{H}} \text{ et (très important) } \epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1. \tag{3.31}$$

Des relations précédedentes ont déduit les équations de Maxwell pour des particules dans le vide : l'équation de Faraday

$$\nabla \times \vec{\mathbf{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t}, \tag{3.32}$$

l'équation d'Ampère

$$\nabla \times \vec{\mathbf{B}} = \mu_0 \vec{\mathbf{J}} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t}, \tag{3.33}$$

l'équation de Maxwell-Gauss sur la divergence du champ électrique

$$\nabla \cdot \vec{\mathbf{E}} = \rho/\epsilon_0, \tag{3.34}$$

et la divergence du champ magnétique

$$\nabla \cdot \vec{\mathbf{B}} = 0. \tag{3.35}$$

3.1.6 Le plasma considéré comme un milieu diélectrique

Le plasma est considéré ici comme une sorte de boite noire à l'intérieur de laquelle on ne regarde pas. On ne veut donc pas s'occuper des termes sources $\vec{\mathbf{J}}_{int}$ et ρ_{int}, car ce sont des grandeurs microscopiques liées au fonctionnement interne du plasma. On les remplace donc par des grandeurs macroscopiques. Ici, on prend le parti de faire apparaitre une induction (ou déplacement) électrique, à laquelle est associée un tenseur diélectrique.

L'équation de Faraday et de divergence de l'induction magnétique ne changent pas par rapport à la description de type charges dans le vide :

$$\nabla \times \vec{\mathbf{E}} = -\partial \vec{\mathbf{B}}/\partial t, \tag{3.36}$$

$$\nabla \cdot \vec{\mathbf{B}} = 0. \tag{3.37}$$

Si on regarde le plasma comme une boite noire, on ne s'intéresse pas à la description de la densité de courant $\vec{\mathbf{J}}$. Si on adopte une description diélectrique du plasma, on écrit l'équation d'Ampère 3.33 sous la forme

$$\nabla \times \vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{J}}_{ext} + \partial \vec{\mathbf{D}} / \partial t. \tag{3.38}$$

où l'on a défini le déplacement (ou l'induction) électrique $\vec{\mathbf{D}}$ par la relation

$$\frac{\partial \vec{\mathbf{D}}}{\partial t} = \vec{\mathbf{J}}_{int} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t} \tag{3.39}$$

(compte tenu de la relation $\mu_0 \epsilon_0 c^2 = 1$). La densité de courant $\vec{\mathbf{J}}_{ext}$ n'est pas portée ici par les particules du plasma. C'est un courant imposé au plasma par d'éventuelles contraintes extérieures. La divergence de 3.39, 3.34 et la conservation des charges du plasma impliquent :

$$\frac{\partial \nabla \cdot \vec{\mathbf{D}}}{\partial t} = \nabla \cdot \vec{\mathbf{J}}_{int} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial \rho_{ext}}{\partial t}, \tag{3.40}$$

ce qui, à une constante près devient

$$\nabla \cdot \vec{\mathbf{D}} = \rho_{ext}. \tag{3.41}$$

La divergence du déplacement ne dépend que de la densité de charge ρ_{ext} imposée de l'extérieur.

Le tenseur diélectrique du plasma est l'opérateur qui relie le champ et l'induction électriques : $\vec{\mathbf{D}} = \vec{\vec{\epsilon}} \cdot \vec{\mathbf{E}}$. Les relations 3.39 et 3.29 montrent que le tenseur diélectrique dans un plasma est défini par :

$$\frac{\partial \vec{\vec{\epsilon}}}{\partial t} \cdot = \vec{\vec{\sigma}} \cdot + \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}. \tag{3.42}$$

La forme générale de l'équation d'Ampère en fonction du déplacement (ou induction) électrique $\vec{\mathbf{D}}$ et du champ (ou excitation) magnétique $\vec{\mathbf{H}}$ est :

$$\nabla \times \vec{\mathbf{H}} = \vec{\mathbf{J}}_{ext} + \partial \vec{\mathbf{D}} / \partial t. \tag{3.43}$$

La comparaison avec 3.38 montre que $\mu_0 \vec{\mathbf{H}} = \vec{\mathbf{B}}$. La perméabilité magnétique μ du plasma, généralement définie par $\mu \vec{\mathbf{H}} = \vec{\mathbf{B}}$, vaut ici μ_0. C'est à dire qu'avec le formalisme du plasma considéré comme un diélectrique, la relation entre le champ et l'induction magnétique est la même que dans le vide. C'est parce qu'on a pris le parti de "faire passer" tout le courant interne du plasma dans la définition du déplacement électrique.

3.1.7 Le plasma considéré comme un milieu magnétique

On peut également prendre le parti de faire apparaître un champ magnétique $\vec{\mathbf{H}}$ qui prend seul en compte l'effet de la densité de courant interne. On garde alors, pour la partie électrique, la relation simple $\vec{\mathbf{D}} = \epsilon_0 \vec{\mathbf{E}}$.

L'équation d'Ampère s'écrit alors

$$\nabla \times \vec{\mathbf{H}} = \vec{\mathbf{J}}_{ext} + \epsilon_0 \partial \vec{\mathbf{E}} / \partial t, \tag{3.44}$$

et le champ magnétique est défini par

$$\nabla \times \vec{\mathbf{H}} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{\mathbf{B}} - \vec{\mathbf{J}}_{int}. \tag{3.45}$$

Si on sait écrire la densité de courant sous la forme d'un rotationnel

$$\vec{\mathbf{J}}_{int} = \nabla \times \vec{\mathbf{M}} \tag{3.46}$$

($\vec{\mathbf{M}}$ est alors la magnétisation ou densité de moment magnétique), on peut appliquer la relation bien connue

$$\vec{\mathbf{H}} = \frac{1}{\mu_0} \vec{\mathbf{B}} - \vec{\mathbf{M}}. \tag{3.47}$$

En fait, il est assez difficile de mettre la densité de courant interne du plasma sous forme d'un rotationnel. Le formalisme du plasma considéré comme un milieu magnétique est donc assez peu employé. Il existe néanmoins des exceptions. Par exemple, lorsque l'on décrit le mouvement non pas des particules du plasma, mais de leur centre guide, le courant peut être réparti en deux parties : une associée aux dérives des centres guide (c'est une partie qui compte dans la partie diélectrique) et le courant de magnétisation des centres guides, qui représente en fait la rotation des particules autour de leur centre guide. Cette partie s'écrit aisément comme un rotationnel, et ce courant de magnétisation $\nabla \times \vec{\mathbf{M}}$ des centres guides peut être considéré comme une partie d'un champ magnétique $\vec{\mathbf{H}} = \frac{1}{\mu_0} \vec{\mathbf{B}} - \vec{\mathbf{M}}$.

3.1.8 Autres relations entre des grandeurs électrodynamiques

Le but en physique des plasmas est de comprendre ce qui se passe *à l'intérieur* du plasma. C'est donc avec la description du type charges dans le vide qu'il faut travailler. Les relations les plus utiles sont donc celles qui relient les termes source $\vec{\mathbf{J}}_{int}$ et ρ_{int} au champ électrique. On travaillera donc surtout avec σ et, dans une moindre mesure, avec χ. Néanmoins, beaucoup de propriétés électrodynamiques des systèmes physiciques sont caractérisées par d'autres grandeurs telle que le tenseur diélectrique, la perméabilité magnétique, la susceptibilité (ou polarisation) électrique etc. La relation entre le tenseur diélectrique et la conductivité a été établie ci-dessus.

Voici, à titre d'exemple, la relation entre la susceptibilité et le tenseur diélectrique.

La description d'un corps diélectrique peut se fonder sur l'effet de polarisation : sous l'effet d'un champ électrique $\vec{\mathbf{E}}$, les charges contenues dans ce corps se déplacent, en général de façon à réduire le champ électrique par rapport à la valeur $\vec{\mathbf{E}}_v$ qu'il aurait dans le vide. On caractérise cet effet par le vecteur polarisation $\vec{\mathbf{P}}$ défini par $\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{E}}_v + \vec{\mathbf{P}}$. Si on peut relier le vecteur polarisation au champ electrique : $\vec{\mathbf{P}} = \epsilon_0\xi \cdot \vec{\mathbf{E}}$, alors, à un facteur ϵ_0 près, l'induction électrique correspond à la valeur $\vec{\mathbf{E}}_v$ qu'aurait le champ dans le vide. Alors, $\vec{\mathbf{D}} = \epsilon_0\vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{P}}$. L'opérateur ξ est la polarisabilité (ou susceptibilité) électrique. Comme $\vec{\mathbf{D}} = \vec{\vec{\epsilon}}\vec{\mathbf{E}}$, la relation entre la susceptibilité et le tenseur diélectrique est $\vec{\vec{\epsilon}} = \epsilon_0(1 + \vec{\vec{\xi}})$.

3.2 Représentation du champ magnétique à l'aide des potentiels d'Euler

On représente le champ magnétique comme le produit vectoriel de deux champs dérivant de potentiels scalaires α et β,

$$\vec{\mathbf{B}} = \nabla\alpha \times \nabla\beta. \tag{3.48}$$

On appelle aussi α et β les potentiels de Clebch (spécialement chez les matheux). Une ligne de champ est définie par les équations des valeurs constantes de α et β. L'equation 3.48 qui partant d'un champ magnétique, permettrait de remonter aux potentiels d'Euler, n'a pas nécessairement une solution, et si il y en a, elle n'est pas unique. Supposons l'existence d'une solution α_1 et β_1 et considérons deux champs scalaires α_2 et β_2

$$\vec{\mathbf{B}} = \nabla\alpha_1 \times \nabla\beta_1 \tag{3.49}$$

$$\nabla\alpha_2 \times \nabla\beta_2 = \left(\frac{\partial\alpha_2}{\partial\alpha 1}\frac{\partial\beta_2}{\partial\beta_1} - \frac{\partial\beta_2}{\partial\alpha_1}\frac{\partial\alpha_2}{\partial\beta_2}\right)(\nabla\alpha_1 \times \nabla\beta_1). \tag{3.50}$$

Les champs α_2 et β_2 sont des potentiels d'Euler associés à $\vec{\mathbf{B}}$ pourvu que

$$\frac{\partial\alpha_2}{\partial\alpha 1}\frac{\partial\beta_2}{\partial\beta_1}-\frac{\partial\beta_2}{\partial\alpha_1}\frac{\partial\alpha_2}{\partial\beta_2}=1. \tag{3.51}$$

Dans le cas d'un champ axisymétrique, en coordonnées sphériques, les potentiels se réduisent à $\alpha=\alpha(r,\theta)$ et $\beta=a\phi$. Le champ magnétique est alors défini par $B_r=a/(r^2\sin\theta)\partial_\theta\alpha$, $B_\theta=-a/(r\sin\theta)\partial_r\alpha$, et $B_\phi=0$. Le rotationnel de B (utile pour l'équation d'Ampère) n'a qu'une composante selon ϕ, qui s'écrit $\nabla\times_\phi\vec{\mathbf{B}}=\frac{a}{r}[\frac{\partial}{\partial r}(-\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\alpha}{\partial r})-\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\alpha}{\partial\theta})]$.

Le potentiels d'Euler ne permettent de représenter que des champs magnétiques dont l'hélicité est nulle. En effet, la relation (A.2) appliquée à α et $\nabla\beta$ montre que

$$\vec{\mathbf{B}}=\nabla\times(\alpha\nabla\beta), \tag{3.52}$$

donc $\vec{\mathbf{A}}=\alpha\nabla\beta$ est un potentiel vecteur du champ magnétique. Le produit $\vec{\mathbf{A}}\cdot\vec{\mathbf{B}}$ est un produit mixte comprennant deux fois $\nabla\beta$, il est nul. L'hélicité est donc nulle.

3.3 Transformation du champ électromagnétique par changement de repère

On considère un changement de repère galiléen et on se considère le plasma comme une assemblée de charges dans le vide. Dans ce cas, le champ électromagnétique est décrit par les champs $\vec{\mathbf{E}}$ et $\vec{\mathbf{B}}$. Soit $(V,0,0)$ la vitesse du repère R' par rapport au repère R. La transformation de Lorentz pour le champ électromagnétique est

$$\begin{aligned} E'_x &= E_x && (3.53)\\ E'_y &= \gamma(E_y-vB_z) &&\\ E'_z &= \gamma(E_z+vB_y) &&\\ B'_x &= B_x && (3.54)\\ B'_y &= \gamma(B_y+\frac{v}{c^2}E_z) &&\\ B'_z &= \gamma(B_z-\frac{v}{c^2}E_y) && \end{aligned}$$

$$(3.55)$$

où $\gamma = \sqrt{1-(v/c)^2}$. En particulier dans le cas non relativiste, qui nous interessera le plus souvent

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{E}}' &= \vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}} && (3.56) \\ \vec{\mathbf{B}}' &= \vec{\mathbf{B}} && (3.57) \\ & && (3.58) \end{aligned}$$

La théorie de la relativité restreinte nous apprend que l'on peut former les quadrivecteurs suivants à partir du couple densité de courant / densité de charge, et potentiel vecteur / potentiel électrique : $(\vec{\mathbf{j}}, c\rho)$ et $(\vec{\mathbf{A}}, \Phi/c)$. On en déduit les formules de changement de repère :

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{j}}' &= \gamma(\vec{\mathbf{j}} + \rho\vec{\mathbf{v}}) && (3.59) \\ \rho' &= \gamma(\rho + \frac{1}{c^2}\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{j}}) && (3.60) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{A}}' &= \gamma(\vec{\mathbf{A}} + \frac{\vec{\mathbf{v}}}{c}\Phi) && (3.61) \\ \Phi' &= \gamma(\Phi + \vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{A}}) && (3.62) \end{aligned}$$

ce qui donne dans l'approximation non-relativiste

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{j}}' &= \vec{\mathbf{j}} + \rho\vec{\mathbf{v}} && (3.63) \\ \rho' &= \rho && (3.64) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{A}}' &= \vec{\mathbf{A}} && (3.65) \\ \Phi' &= \Phi + \vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{A}} && (3.66) \end{aligned}$$

On peut retrouver la transformation 3.56 des champs $\vec{\mathbf{E}}$ et $\vec{\mathbf{B}}$ à partir de ces relations. C'est trivial pour le champ magnétique ; pour le champ électrique, on trouve $\vec{\mathbf{E}}' = -\nabla\Phi' - \partial_{t'}\vec{\mathbf{A}}' = -\nabla\Phi - \partial_{t'}\vec{\mathbf{A}} - \nabla\cdot(\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{v}})$. La divergence vaut $\nabla\cdot(\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{v}}) = \vec{\mathbf{v}} \times \nabla\times\vec{\mathbf{A}} + (\vec{\mathbf{v}} \cdot \nabla)\vec{\mathbf{A}}$. Le premier terme de droite est $\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}}$. Le second est un terme convectif. Ainsi $\vec{\mathbf{E}}' = \nabla\Phi - \partial_{t'}\vec{\mathbf{A}} - (\vec{\mathbf{v}} \cdot \nabla)\vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}}$. Le terme $-\partial_{t'}\vec{\mathbf{A}} - (\vec{\mathbf{v}} \cdot \nabla)\vec{\mathbf{A}}$ est la dérivée de $\vec{\mathbf{A}}$ dans le repère qui se promène à la vitesse $\vec{\mathbf{v}}$, donc, dans le reprère R', c'est $\partial_t\vec{\mathbf{A}}$. Ainsi, on retrouve 3.56.

3.3.1 intérêt de la jauge de Lorentz

La jauge de Lorentz a l'intérêt d'être préservée par changement de repère galiléen. Ce n'est pas le cas des autres. La jauge $\nabla \cdot A = 0$, par exemple, dépend du référentiel choisi.

3.3.2 Notion de mouvement des lignes de forces

Le champ magnétique est souvent représenté par ses lignes de champ. Elles sont définies comme les lignes qui sont en tout point tangentes au vecteur d'induction magnétique $\vec{\mathbf{B}}$:

$$\frac{dx}{B_x} = \frac{dy}{B_y} = \frac{dz}{B_z} \tag{3.67}$$

On peut définir le *reprère du champ magnétique.* C'est le repère (défini localement) dans lequel le champ électrique perpendiculaire $\vec{\mathbf{E}}_\perp$ est nul. D'après (3.56) ce repère a une vitesse telle que $\vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{v}}_m \times \vec{\mathbf{B}} = 0$, c'est à dire

$$\vec{\mathbf{v}}_{\perp m} = \frac{\vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{B}}}{B^2}. \tag{3.68}$$

La composante parallèle $\vec{\mathbf{v}}_\parallel$ au champ magnétique est arbitraire.

On montre maintenant que si deux points initialement sur la même ligne de force se déplacent avec la vitesse 3.68, alors ils restent sur la même ligne de force. Cela reste vrai tant que celle-ci est définie, c'est à dire tant que le champ magnétique ne s'annule pas. On considère donc le vecteur $\delta\mathbf{l}$ qui relie, à l'instant t deux points, séparés d'une distance infinitésimale, tous deux sur la même ligne de champ. Pour caractériser ce fait, on peut dire que $\delta\mathbf{l}$ est parallèle à $\mathbf{B}$. Donc le vecteur $\mathbf{C} = \delta\mathbf{l} \times \mathbf{B}$ est nul. On va montrer que à l'instant $t + dt$, le vecteur $\mathbf{C}$, associé aux points convectés à la vitesse 3.68 n'a pas changé de valeur. Et donc que les deux points sont toujours sur la même ligne de champ.

$$d_t(\vec{\mathbf{C}}) = d_t(\delta\vec{\mathbf{l}} \times \vec{\mathbf{B}}) = d_t\delta\vec{\mathbf{l}} \times \vec{\mathbf{B}} + \delta\vec{\mathbf{l}} \times d_t\vec{\mathbf{B}}$$

Or $d_t\delta\vec{\mathbf{l}} = \vec{\mathbf{v}}_{(\vec{\mathbf{l}}+\delta\vec{\mathbf{l}})} - \vec{\mathbf{v}}_{(\vec{\mathbf{l}})} = \delta\vec{\mathbf{l}} \cdot \nabla\vec{\mathbf{v}}$. Notons que $\nabla\vec{\mathbf{v}}$ est un tenseur. D'autre part, la derivée convective du champ magnétique, compte tenu de l'équation de Faraday 3.6, est $d_t\vec{\mathbf{B}} = -\nabla \times \vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{v}} \cdot \nabla\vec{\mathbf{B}}$. Ainsi,

$$d_t(\vec{\mathbf{C}}) = \delta\vec{\mathbf{l}} \cdot \nabla\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}} + \delta\vec{\mathbf{l}} \times (-\nabla \times \vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{v}} \cdot \nabla\vec{\mathbf{B}})$$

Remarquons maintenant que $\delta\vec{\mathbf{l}} = \delta l \vec{\mathbf{b}}$ où $\vec{\mathbf{b}}$ est le vecteur unitaire du champ magnétique. Cela nous permettra de mettre δl en facteur, et de dégager quelques symmétries appréciables pour montrer l'invariance de **C**. D'autre part, nous appliquons maintenant la relation $\vec{\mathbf{E}} = -\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}}$, combinée au développement du rotationnel d'un produit vectoriel (voir l'annexe A) :

$$\nabla \times (\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}}) = \vec{\mathbf{B}} \cdot \nabla\vec{\mathbf{v}} - \vec{\mathbf{v}} \cdot \nabla\vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{v}}(\nabla \cdot \vec{\mathbf{B}}) - \vec{\mathbf{B}}(\nabla \cdot \vec{\mathbf{v}}).$$

Le troisième terme est nul. On regroupe tout cela, en factorisant les modules des vecteurs. Et c'est l'observation de cette ligne qui va révéler l'invariance de $\vec{\mathbf{C}}$.

$$d_t(\vec{\mathbf{C}}) = B\delta l[\vec{\mathbf{b}} \cdot \nabla\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{b}} \times (\vec{\mathbf{b}} \cdot \nabla\vec{\mathbf{v}} - \frac{1}{B}\vec{\mathbf{v}} \cdot \nabla\vec{\mathbf{B}} - \vec{\mathbf{b}}(\nabla \cdot \vec{\mathbf{v}}) + \frac{1}{B}\vec{\mathbf{v}} \cdot \nabla\vec{\mathbf{B}})] = 0.$$

Le physicien loue la Nature de lui concéder quelques invariants car elle laisse ainsi quelques bribes de ses mystères à la portée de l'entendement de nos pauvres cerveaux humains.

On dira que les lignes de forces se déplacent à la vitesse $\vec{\mathbf{v}}_{\perp m}$. C'est une notion indépendante du plasma qui peut se trouver au même endroit. Néanmoins, la MHD idéale nous dit que le plasma se déplace avec une vitesse perpendiculaire $\vec{\mathbf{v}}_\perp = \vec{\mathbf{v}}_{\perp m}$. Même lorsque cette propriété est mise en défaut, la notion de mouvement des lignes de forces décrite dans ce paragraphe garde un sens.

3.4 Energie électromagnétique

Les échanges d'énergie entre le plasma et le champ électromagnétique sont dus aux travail de la force électromagnétique (i.e. la force de Lorentz) sur les particules chargées. Pour une particule de charge q et de vitesse $\vec{\mathbf{v}}$, au voisinage d'un point $\vec{\mathbf{r}}$ ce travail est $q(\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}) + \vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}}(\vec{\mathbf{r}})) \cdot \vec{\mathbf{v}}dt = \vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}) \cdot q\vec{\mathbf{v}}dt$. Pour un plasma, il faut faire la somme sur l'ensemble des particules se trouvant en ce lieu, et le travail du champ électromagnétique sur le plasma est $\vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{J}}dt$, où $\vec{\mathbf{J}}$ est la densité de courant électrique. On peut éliminer la densité de courant de l'expression de ce travail pour ne garder que des grandeurs électromagnétiques. D'après l'équation d'Ampère, $\vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{J}} = \vec{\mathbf{E}} \cdot \nabla \times \vec{\mathbf{H}} - \vec{\mathbf{E}}\partial_t\vec{\mathbf{D}}$, en développant $\vec{\mathbf{E}} \cdot \nabla \times \vec{\mathbf{H}} = \vec{\mathbf{H}} \cdot \nabla \times \vec{\mathbf{E}} - \nabla \cdot (\vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{H}})$ et en appliquant l'équation de Faraday :

$$\vec{\mathbf{H}} \cdot \frac{\partial\vec{\mathbf{B}}}{\partial t} + \vec{\mathbf{E}} \cdot \frac{\partial\vec{\mathbf{D}}}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{H}}) + \vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{J}} = 0. \tag{3.69}$$

Le produit $\vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{H}}$ est le *vecteur de Poynting*. Dans le cas des charges dans le vide, cette équation peut se mettre sous forme conservative

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{B^2}{2\mu_0} + \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \nabla\cdot(\frac{\vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{B}}}{\mu_0}) = -\vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{J}}. \tag{3.70}$$

Il apparait ainsi que $(B^2/2\mu_0) + (\epsilon_0 E^2/2)$ est la densité d'énergie électromagnétique ; le vecteur de Poynting s'interprète ici comme le flux de la densité d'énergie électromagnétique. Le travail $\vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{J}}$ est le terme source, qui traduit les échanges d'énergie entre le plasma et le champ électromagnétique.

Si on se place dans la description diélectrique du plasma, l'équation de l'énergie électromagnétique est

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{B^2}{2\mu_0} + \vec{\mathbf{E}} \cdot \frac{\partial \vec{\mathbf{D}}}{\partial t} + \nabla\cdot(\frac{\vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{B}}}{\mu_0}) = -\vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{J}}_{ext}. \tag{3.71}$$

3.5 Loi d'Ohm généralisée et causalité

3.5.1 Principe de causalité

Prenons l'exemple très utile de la loi d'Ohm 3.29. Une perturbation de champ électrique $\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}', t')$ définie au point $\vec{\mathbf{r}}'$ et à l'instant t' va engendrer un courant électrique $\vec{\mathbf{J}}(\vec{\mathbf{r}}, t)$ en différents points $\vec{\mathbf{r}}$ du plasma, à différents instants t. Comme $\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}', t')$ est la cause, elle doit précéder son effet $\vec{\mathbf{J}}(\vec{\mathbf{r}}, t)$. Ce dernier n'est donc non nul que pour $t' < t$, en vertu du *principe de causalité*. Le courant s'écrit en sommant la contribution des perturbations $\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}', t')$ en tous points $\vec{\mathbf{r}}'$ et tous instants $t' < t$

$$\vec{\mathbf{J}}(\vec{\mathbf{r}}, t) = \int_V d\vec{\mathbf{r}}' \int_{-\infty}^{t} dt' \vec{\vec{\sigma}}(\vec{\mathbf{r}}, \vec{\mathbf{r}}', t, t') \cdot \vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}', t') \tag{3.72}$$

où $\vec{\vec{\sigma}}$ est un opérateur, pas necéssairement linéaire.

3.5.2 Loi d'Ohm linéarisée

Bien qu'en général les relations entre les termes source et le champ électromagnétique soient non-linéaires, il peut être intéressant d'en étudier une forme linéarisée. C'est généralement ce qu'on fait pour étudier la propagation d'ondes de petite amplitude ou pour étudier la stabilité d'un plasma vis à vis de petites perturbations.

La loi d'Ohm s'écrit de la même façon que ci dessus mais maintenant $\vec{\vec{\sigma}}$ est linéaire et $\vec{\vec{\sigma}}(\vec{\mathbf{r}}, \vec{\mathbf{r}}', t, t')$ est un tenseur qui définit la propagation d'une perturbation électrique appliquée en $(\vec{\mathbf{r}}', t')$ et observée en $(\vec{\mathbf{r}}, t)$. Comme c'est une relation linéaire, ce tenseur n'est défini qu'en fonction des propriétés du système non perturbé.

Chapitre 4

Le champ magnétique dipolaire et le mouvement des particules chargées

4.1 Le champ magnétique dipolaire

4.1.1 les relations fondamentales

Le champ magnétique dipolaire peut être, par exemple, celui d'une planète. C'est pour cela qu'on se réfère parfois, dans les calculs qui suivent, à des notions d'horizontale, de latitude, etc. Voici quelques propriétés des champs magnétiques dipolaires. Ce qui suit vient du cours de DEA de Roger Gendrin. Soit M ($M > 0$) le moment du dipôle magnétique, le champ magnétique est le gradient d'un potentiel magnétique V. En coordonnées polaires, λ est la latitude magnétique, θ est la colatitude (la grandeur usuelle des coordonnées polaires) :

$$V = -\frac{M\sin(\lambda)}{r^2} \tag{4.1}$$

$$B_r = -\partial_r V = -\frac{2M\sin\lambda}{r^3} = -\frac{2M\cos\theta}{r^3} \tag{4.2}$$

$$B_\theta = -B_\lambda = -\frac{1}{r}\partial_\theta V = +\frac{M\cos\lambda}{r^3} = +\frac{M\sin\theta}{r^3} \tag{4.3}$$

$$B = (B_r^2 + B_\lambda^2)^{1/2} = \frac{M}{r^3}(1+3\sin^2\lambda)^{1/2} \tag{4.4}$$

Les lignes de champ, définies par $dr/Br = rd\lambda/B_\lambda$ obéissent à

$$\frac{dr}{rd\lambda} = -2\tan\lambda, \tag{4.5}$$

dont la solution est

$$r = r_0 \cos^2\lambda = r_0 \sin^2\theta \tag{4.6}$$

Soit a est le rayon de la planète, r_0 la distance équatoriale de la ligne de force au centre de la planète, et Λ la latitude magnétique du pied de cette ligne de force, alors

$$a = r_0 \cos^2\Lambda \tag{4.7}$$

Notons que le rapport entre le moment magnétique et le module du champ magnétique équatorial à la surface de l'astre est donné par

$$M = B_0 a^3. \tag{4.8}$$

Soit I l'inclinaison du champ sur l'axe horizontal (défini localement, celui de la direction de B_λ) :

$$\tan I = 2\tan\lambda. \tag{4.9}$$

L'élément de ligne de force

$$ds = (dr^2 + r^2(d\lambda)^2)^{1/2} = \frac{r}{\cos\lambda}(1 + 3\sin^2\lambda)^{1/2} d\lambda \tag{4.10}$$

permet le calcul de la dérivée de B le long d'une ligne de force

$$\frac{dB}{ds} = \frac{3B}{r}\frac{3 + 5\sin^2\lambda}{(1 + 3\sin^2\lambda)^{3/2}}\sin\lambda. \tag{4.11}$$

Le gradient de B perpendiculairement à une ligne de champ est donné par

$$\nabla_\perp B = \frac{3M\cos\lambda}{r^4}\frac{1 + \sin^2\lambda}{1 + 3\sin^2\lambda}. \tag{4.12}$$

Le rayon de courbure de la ligne de force

$$R = \frac{r_0}{3}\frac{(1 + 3\sin^2\lambda)^{3/2}}{1 + \sin^2\lambda}. \tag{4.13}$$

A l'equateur, le rayon de courbure est égal au tiers de la distance planétocentrique de la ligne de force. Calcul d'un élément de volume d'un tube de force : on tient compte du caractère conservatif du flux, $BdS = B_0 dS_0$. Si dS_0 est pris au niveau $r = a$ (surface de la planète),

$$dV = a\frac{\cos^7 \lambda}{\cos^7 \Lambda}(1 + 4\tan^2 \Lambda)^{1/2}. \tag{4.14}$$

La longueur d'une ligne de force (calcul personnel, sans garantie) est donnée par

$$\Delta s = \int_\lambda ds = \int_\lambda r_0 \cos\lambda(1 + 3\sin^2 \lambda)^{1/2} d\lambda. \tag{4.15}$$

Les changements de variables suivants : $u = \sin\lambda$, $z = u^2$, $t^2 = (1+3z)/(4z)$, puis $x = t\sqrt{4/3}$, pour aboutir à l'intégrale $ds = \int dx \frac{x^2}{(1-x^2)^2}$. La formule 2.147.4 du Gradstein et Rysik en permet le calcul. Pour $x > 1$ (le cas ci-présent),

$$\Delta s = \frac{r_0}{2\sqrt{3}}\left[\frac{x}{x^2-1} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\right] \tag{4.16}$$

avec

$$x = \left(\frac{1 + 3\sin^2 \lambda}{3\sin^2 \lambda}\right)^{1/2}. \tag{4.17}$$

4.1.2 Potentiels d'Euler

Le champ magnétique dipolaire peut être décrit à l'aide des potentiels d'Euler,

$$\vec{\mathbf{B}} = \nabla\alpha \times \nabla\beta \tag{4.18}$$

$$\alpha = -B_0 R^2 \cos{(\lambda)}^2 r^{-1} \tag{4.19}$$

$$\beta = R_E \Phi \tag{4.20}$$

où B_0 est l'intensité du champ magnétique, à l'équateur, à la distance R du centre du dipôle ; Φ est l'azimmuth (le temps local magnétique dans le cas de coordonées planétaires) ; r est la distance au centre du dipôle. Les équation stipulant α et β constants, caractérisant une ligne de champ magnétique, permettent effectivement de retrouver la relation 4.6.

4.1.3 Valeurs numériques, cas de la Terre

Le moment magnétique de la Terre est $M = 8.1\,10^{15}$ T.m^3.
Voici les coordonnées géographiques des pôles géomagnétiques :$\lambda = +78.5^o$,

$\phi = 69^o$ pour le pôle Nord, et $\lambda = -78.5^o$, $\phi = 111^o$ pour le pôle Sud. L'inclinaison du dipôle magnétique est de 11.5 degrés par rapport à l'axe de rotation de la Terre. Le rayon a de la Terre est $a = 6378$ km, l'intensité du champ magnétique à l'équateur terrestre est environ 0.315 Gauss, c'est à dire $31.5\mu T$. En fait, le champ varie, entre des valeurs descendant jusqu'à $25\mu T$ et monte, aux pôles, jusqu'à $70\mu T$. L'approximation du champ magnétique dipolaire pour la Terre n'est pas valable au delà de quelques rayons terrestres d'altitude (de l'ordre de 3 ou 4).

4.2 Mouvement quasi-adiabatique dans un dipôle magnétique

4.3 Une sphère conductrice en rotation dans le vide avec un dipôle magnétique aligné

On suppose que l'axe du dipole est aligné avec l'axe de rotation. La vitesse angulaire de rotation est Ω. On fait un calcul des forces dans ce cas, comme l'a exposé (avec moins de détails) Gloldreich en 1969 pour prouver qu'un pulsar doit avoir un plasma magnétosphérique.

On suppose que l'intérieur de la sphère est un conducteur, au moins sur une épaisseur suffisante. Dans un repère fixe (non-tournant), on y voit un champ électrique de corotation

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{E}} &= -\Omega\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{B}} \\ &= (0, 0, -\Omega r \cos\lambda) \times (-\frac{2M \sin\lambda}{r^3}, +\frac{M\cos\lambda}{r^3}, 0) \\ &= (\frac{\Omega M \cos^2\lambda}{r^2}, \frac{2\Omega M \cos\lambda \sin\lambda}{r^2}, 0).\end{aligned} \tag{4.21}$$

On peut calculer le potentiel électrique associé, valable à l'intérieur de la sphère, en résolvant l'équation $\vec{\mathbf{E}} = -\nabla\Phi$ ce qui donne en coordonnées sphériques :

$$\begin{aligned}\partial_r \Phi &= -\frac{\Omega M \cos^2\lambda}{r^2} \\ \frac{1}{r}\partial_\theta \Phi &= \frac{2\Omega M \cos\lambda \sin\lambda}{r^2}.\end{aligned}$$

La solution est

$$\Phi_{\text{int.}} = \frac{\Omega M \cos^2 \lambda}{r} = \frac{\Omega B_{\text{pole}} R^3 \sin^2 \theta}{2r}. \tag{4.22}$$

La résolution du potentiel électrique à l'extérieur de la sphère dépend des conditions aux limites à la surface de la sphère : il peut y avoir un saut de la composante normale du champ électrique, mais le champ tangent $\vec{\mathbf{E}}_t$ à la surface est continu. Ce champ n'a qu'une composante (en vertu de la symétrie azimutale due à l'alignement des axes magnétique et de rotation). En conséquence, au voisinage de la surface, des deux cotés :

$$E_t = E_\theta = \frac{1}{r}\partial_\theta \Phi = \frac{2\Omega M \cos\lambda \sin\lambda}{r^2}. \tag{4.23}$$

Le dernier terme est ici déduit de $\Phi_{\text{int.}}$, mais on le rattachera à $\Phi_{\text{ext.}}$ dans les lignes qui suivent. Il faut résoudre l'équation de Laplace (Poisson, mais densité de charges nulle) à l'extérieur de la sphère, milieu supposé vide. Cela est fait en annexe. C'est un problème classique, qui se résoud en décomposant $\Phi = R(r)T(\theta)$. (On n'a pas considéré de fonction de ϕ puisqu'on a une symétrie axiale). La solution, qui tend vers zéro pour r grand, est de la forme $R = r^{-l-1}$, avec $l > 0$. Dans ce cas, la fonction T associée est $P_l(\cos\theta)$. Comme on doit vérifier la condition $\frac{1}{r}\partial_\theta \Phi = \frac{2\Omega M \cos\lambda \sin\lambda}{r^2}$, la solution Φ doit être du second degré en $\cos\theta$. Donc elle doit être proportionnelle à P_2 et $l = 2$. Est-ce possible ? Vérifions. On pose

$$\Phi_{\text{ext.}} = a' r^{-l-1} P_l(\cos\theta) = \frac{a}{r^3}(3\cos^2\theta - 1). \tag{4.24}$$

On dérive $\frac{1}{r}\partial_\theta \Phi_{\text{ext.}}$, on identifie à $2\Omega M \cos\lambda \sin\lambda / r^2$, et on trouve que l'égalité est possible à condition que $a = -\Omega M R^2/3$. Comme $M = B_{\text{pole}} R^3/2$,

$$\Phi_{\text{ext.}} = -\frac{\Omega B_{\text{pole}} R^5}{6r^3}(3\cos^2\theta - 1). \tag{4.25}$$

Bien sûr, le champ électrique normal à la surface de la sphère n'est pas continu. C'est normal, à condition que la surface de la sphère ait une densité surfacique de charge σ telle que

$$(\vec{\mathbf{E}}_{\text{ext.}} - \vec{\mathbf{E}}_{\text{int.}})\vec{\mathbf{n}}_{\text{vers l'exterieur}} = (\partial_r \Phi_{\text{ext.}} - \partial_r \Phi_{\text{int.}})_{r=R} = \sigma/\epsilon_0. \tag{4.26}$$

On peut calculer ces deux grandeurs et en déduire σ : $\partial_r \Phi_{\mathrm{ext.}} = -\Omega B_{\mathrm{pole}} R^3 \sin^2\theta/2r^2$, $\partial_r \Phi_{\mathrm{int.}} = 3\Omega B_{\mathrm{pole}} R^5 (3\cos^2\theta - 1)/6r^4$. Il vient

$$\sigma = -\frac{\epsilon_0 \Omega B_{\mathrm{pole}} R \cos^2\theta}{2}. \tag{4.27}$$

Il est intéressant de connaître la valeur du champ électrique parallèle à la surface de la sphère. En fait, on veut sourtout la connaître dans le référentiel de la pshère (en rotation), pour voir comme la matière de la surface de la sphère peut être accélérée. Alors, il est préférable, dans un premier temps, de calculer $\vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{B}}$, car c'est un invariant relativiste : sa valeur est la même dans les deux repères. A l'intérieur de la sphère, cet invariant est nul. Du coté externe de la surface, c'est

$$(\vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{B}})_{\mathrm{ext.}} = B_r(-\partial_r \Phi_{\mathrm{ext.}}) + B_\theta(-\frac{1}{r}\partial_\theta \Phi_{\mathrm{ext.}}) = -\Omega B^2_{\mathrm{pole}} R \left(\frac{R}{r}\right)^7 \cos^3\theta. \tag{4.28}$$

La force d'accélération due au champ électrique parallèle doit s'appliquer à la limite extérieure de la surface de la sphère. C'est, dans le référentiel fixe d'un observateur, $\vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{B}}/B$. On peut le comparer à la force gravitationnelle projettée le long d'une ligne de champ $g_\parallel = \vec{\mathbf{g}} \cdot \vec{\mathbf{B}}/B$).

$$g_\parallel = \frac{GM_* m B_{\mathrm{pole}} R^3 \cos\theta}{r^5 B} \tag{4.29}$$

où M_* est la masse de la sphère. Le rapport entre les deux forces est

$$\frac{E_\parallel}{g_\parallel} = \frac{\Omega B^2_{\mathrm{pole}} R^5 \cos^2\theta}{GM_* m r^2} \tag{4.30}$$

Numériquement, pour la surface, donc $r = R$,

$$\frac{E_\parallel}{g_\parallel} = \frac{2\pi}{GM_\odot m_e} \frac{B^2_{\mathrm{pole}} R^3 \cos^2\theta}{PG(M_*/M_\odot)(m/m_e)} = 5.2\ 10^{10}\ \frac{B^2_{\mathrm{pole}} R^3 \cos^2\theta}{P(M_*/M_\odot)(m/m_e)} \tag{4.31}$$

où le champ magnétique est exprimé en teslas, le rayon en mètres, la période en secondes, la masse en masses solaires, et la masse de la particules en unités de masse électronique.

4.4 Coordonnées dipolaires

Elles sont définies comme un système de coordonnées curvilignes ν, μ, ϕ où ϕ est l'azimuth (comme en coordonnées cylindriques), les lignes iso-ν et iso-ϕ sont les lignes de champ dipolaires, et μ complète ce système de manière à former un système orthogonal. On peut les définir à partir des coodonnées polaires r, θ, ϕ :

$$\begin{aligned} \nu &= \frac{\sin^2\theta}{r} \\ \mu &= \frac{\cos\theta}{r^2}. \end{aligned} \tag{4.32}$$

La définition de ν provient de l'équation 4.6 définissant une ligne de champ dipolaire. La définition de μ a été obtenue en cherchant les courbes orthogonales à $\nu = cste.$ dans un plan iso-ϕ. En différentiant la définition de ν sous la forme $d\nu = \vec{\mathbf{a}} \cdot (dr, rd\theta) = 0$, c'est à dire$-(\sin^2\theta/r^2)dr + (2\sin\theta\cos\theta/r^2)rd\theta$, on exprime que les courbes $\nu = cste.$ ont leur tangente orthogonale au vecteur $\vec{\mathbf{a}} = (-\sin^2\theta/r^2, 2\sin\theta\cos\theta/r^2)$. Comme on cherche un système orthogonal, la tangente $(dr, rd\theta)$ des courbes $\mu = cste.$ doit être orthogonale à un vecteur $\vec{\mathbf{b}}$ tel que $\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}} = 0$. Une solution directe est $\vec{\mathbf{b}} = (2\sin\theta\cos\theta/r^2, \sin^2\theta/r^2)$, d'où $(2\sin\theta\cos\theta/r^2)dr + (\sin^2\theta/r^2)rd\theta$, équation qui se simplifie et dont la solution correspond à la définition 4.32 de μ (i.e. dont μ est présentement la constante d'intégration).

On peut différentier ces relations, et inverser le système linéaire :

$$dr = \frac{r^2}{1+3\cos^2\theta}d\nu - \frac{2r^3\cos\theta}{1+3\cos^2\theta}d\mu \tag{4.33}$$

$$d\theta = \frac{2r\cos\theta}{1+3\cos^2\theta}d\nu - \frac{r^2\sin\theta}{1+3\cos^2\theta}d\mu. \tag{4.34}$$

Alors, l'élément de longueur $ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$ peut s'exprimer en fonction de $d\nu$ et $d\mu$. Les termes en double produit s'éliminent et il reste

$$ds^2 = (\frac{r^2}{\sin\theta(1+3\cos^2\theta)^{1/2}})^2 d\nu^2 + (\frac{r^3}{(1+3\cos^2\theta)^{1/2}})^2 d\mu^2 \tag{4.35}$$

d'où (en se rappellant ϕ comme dans les coordonnée polaires)

$$h_\nu = \frac{r^2}{\sin\theta(1+3\cos^2\theta)^{1/2}} \tag{4.36}$$

$$h_\mu = \frac{r^3}{(1+3\cos^2\theta)^{1/2}} \tag{4.37}$$

$$h_\phi = r\sin\theta. \tag{4.38}$$

Si on choisit

$$\alpha = \frac{r}{\sin^2\theta} \tag{4.39}$$

$$\beta = \frac{\cos\theta}{r^2}. \tag{4.40}$$

au lieu de ν et μ alors,

$$h_\alpha = \frac{\sin^3\theta}{(1+3\cos^2\theta)^{1/2}} \tag{4.41}$$

$$h_\beta = \frac{r^3}{(1+3\cos^2\theta)^{1/2}} \tag{4.42}$$

$$h_\phi = r\sin\theta. \tag{4.43}$$

Chapitre 5

Généralités sur les ondes

5.1 Champ magnétique associé à une oscillation électrique

Il est intéressant de connaitre la forme générale du champ magnétique associé à une oscillation électrique de la forme

$$\vec{\mathbf{E}}_0(\vec{\mathbf{r}}) \cos(\omega t - \vec{\mathbf{k}} \cdot \vec{\mathbf{r}} + \phi) \tag{5.1}$$

Dans le cas où $E_0(\vec{\mathbf{r}})$ est uniforme, on a affaire à une onde plane dont la phase se propage à la vitesse $v_\phi = \omega/k$. Dans le cas où $k = 0$, on a affaire à une onde stationnaire. L'intégration de l'équation de Faraday 3.32

$$-\frac{\partial}{\partial t}\vec{\mathbf{B}}(\vec{\mathbf{r}}, t) = \vec{\mathbf{k}} \times \vec{\mathbf{E}}_0(r) \sin(\omega t - \vec{\mathbf{k}} \cdot \vec{\mathbf{r}} + \phi) + \nabla\times\vec{\mathbf{E}}_0(r) \cos(\omega t - \vec{\mathbf{k}} \cdot \vec{\mathbf{r}} + \phi) \tag{5.2}$$

nous permet de connaitre la forme du champ magnétique associé :

$$\vec{\mathbf{B}}(\vec{\mathbf{r}}, t) = \vec{\mathbf{B}}_a(\vec{\mathbf{r}}) + \frac{\vec{\mathbf{k}}}{\omega}\times\vec{\mathbf{E}}_0(r) \cos(\omega t - \vec{\mathbf{k}} \cdot \vec{\mathbf{r}} + \phi) - \frac{1}{\omega}\nabla\times\vec{\mathbf{E}}_0(r) \sin(\omega t - \vec{\mathbf{k}} \cdot \vec{\mathbf{r}} + \phi) \tag{5.3}$$

Le premier terme est un champ magnétique ambiant indépendant des oscillations du champ électrique.

Le suivant, important pour une onde progressive, montre que la vitesse de phase détermine le rapport entre l'amplitude des champs magnétique et électrique, et que les champs électrique et magnétique sont orthogonaux.

Le troisième terme, caractéristique des ondes stationnaires montre un déphasage de $\pi/2$ entre les composantes magnétique et électrique.

Notons enfin, dans le cas $E_0(r) = E_0$ uniforme que si $\vec{\mathbf{k}}$ et $\vec{\mathbf{E}}_0$ sont colinéaires, l'onde est électrostatique, sans champ magnétique (dépendant du temps) associé.

5.2 Les ondes planes

5.3 Equations de dispersion, approche par transformée de Fourier

5.3.1 Loi d'Ohm linéarisée dans un plasma homogène

Un plasma homogène est un plasma dont les propriétés à l'équilibre ne dépendent pas de la position. En raison de la possible existence d'un champ magnétique uniforme, un plasma homogène n'est pas nécessairement isotrope. La loi d'Ohm 3.72 linéarisée se simplifie dans le cas d'un plasma homogène. Puisque les propriétés sont indépendantes de la position, le tenseur $\vec{\vec{\sigma}}$ ne dépend spatialement que de $\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'$. Puisque dans le cas linéaire, ce tenseur dépend du plasma non perturbé, qui est en général stationaire, $\vec{\vec{\sigma}}$ ne dépend temporellement que de $t - t'$. On peut donc écrire la conductivité sous la forme $\vec{\vec{\sigma}}(\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}', t - t')$. On peut alors définir la transformée de Fourier de la relation 3.72. On définit les transformées de Fourier du champ électrique et de la densité de courant :

$$\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{k}}, \omega) = \int_V d\vec{\mathbf{r}} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}, t) \exp\left(i(\omega t - \vec{\mathbf{k}} \cdot \vec{\mathbf{r}})\right) \tag{5.4}$$

$$\vec{\mathbf{J}}(\vec{\mathbf{k}}, \omega) = \int_V d\vec{\mathbf{r}} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \vec{\mathbf{J}}(\vec{\mathbf{r}}, t) \exp\left(i(\omega t - \vec{\mathbf{k}} \cdot \vec{\mathbf{r}})\right). \tag{5.5}$$

La relation 3.72 devient

$$\vec{\mathbf{J}}(\vec{\mathbf{k}}, \omega) = \vec{\vec{\sigma}}(\vec{\mathbf{k}}, \omega) \cdot \vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{k}}, \omega) \tag{5.6}$$

où $\vec{\vec{\sigma}}(\vec{\mathbf{k}}, \omega)$ est défini par

$$\vec{\vec{\sigma}}(\vec{\mathbf{k}}, \omega) = \int_V d\vec{\mathbf{r}} \int_{0}^{+\infty} dt \vec{\vec{\sigma}}(\vec{\mathbf{r}}, t) \exp(i(\omega t - \vec{\mathbf{k}} \cdot \vec{\mathbf{r}})). \tag{5.7}$$

On remarquera que l'intégration sur le temps ne porte que sur les valeurs positives. C'est la conséquence, en transformée de Fourier, du principe de causalité de la relation 3.72. Cette intégrale n'est plus exactement une transformée de Fourier par rapport au temps, il s'agirait plutôt d'une transformée de Fourier-Laplace (avec la variable p des transformées de Laplace vérifiant $p = i\omega$).

Démonstration de la loi d'Ohm dans l'espace de Fourier

Il s'agit, par un calcul d'intégrales de prouver les relations 5.6 et 5.7 à partir de la loi d'Ohm dans l'espace des configurations 3.72 et des définitions des transformées de Fourier 5.4 et 5.5.

Partons de la définition du courant $\vec{\vec{\sigma}}(\vec{\mathbf{k}}, \omega)$ et incluons la définition de la conductivité 3.72 :

$$\vec{\mathbf{J}}(\vec{\mathbf{k}}, \omega) = \int_V d\vec{\mathbf{r}} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_V d\vec{\mathbf{r}}' \int_{-\infty}^{+t} dt' \vec{\vec{\sigma}}(\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}', t - t')\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}', t')e^{i(\omega t - \vec{\mathbf{k}}\cdot\vec{\mathbf{r}})}$$

On décompose l'exponentielle avec les variables $\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'$, $t - t'$ d'une part et $\vec{\mathbf{r}}'$,t' d'autre part. On fait le changement de variables $\vec{\rho} = \vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'$, $\tau = t - t'$, on regroupe les intégrations sur le temps :

$$\int_V d\vec{\mathbf{r}} \int_V d\vec{\rho} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_0^{+\infty} d\tau \vec{\vec{\sigma}}(\vec{\rho}, \tau)\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}} - \vec{\rho}, t - \tau)e^{i(\omega\tau - \vec{\mathbf{k}}\cdot\vec{\rho})}e^{i(\omega(t-\tau) - \vec{\mathbf{k}}\cdot(\vec{\mathbf{r}} - \vec{\rho}))}$$

On peut alors inverser l'ordre des intégrations sur t et τ, et sur $\vec{\mathbf{r}}$ et $\vec{\rho}$. On fait les changements de variables $\vec{\mathbf{r}} - \vec{\rho} = \vec{\mathbf{p}}$, $t - \tau = s$

$$\vec{\mathbf{J}}(\vec{\mathbf{k}}, \omega) = \int_V d\vec{\rho} \int_0^{+\infty} d\tau \vec{\vec{\sigma}}(\vec{\rho}, \tau)e^{i(\omega\tau - \vec{\mathbf{k}}\cdot\vec{\rho})} \int_V d\vec{\mathbf{p}} \int_{-\infty}^{+\infty} ds \vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{p}}, s)e^{i(\omega s - \vec{\mathbf{k}}\cdot\vec{\mathbf{p}})}.$$

Cela correspond bien aux relations 5.6 et 5.7.

5.3.2 Analycité de la conductivité dans l'espace des fréquences

La conductivité $\vec{\vec{\sigma}}(\vec{\mathbf{k}}, \omega)$ doit être, comme toutes les grandeurs physiques que l'on aime bien, dérivable par rapport à ses variables. Cela correspond plus ou moins àla notion de régularité employée par les mathématiciens..

C'est du moins ce que supposent la plupart des physiciens étudiant les plasmas. Je crois qu'ils ont tord de supposer une chose pareille (j'y reviendrai dans un autre chapitre). Cela dit, gràce à quelques pirouettes (dont Landau fut l'inventeur), et gràce à la puissance de l'analyse dans le plan complexe, en supposant que la conductivité est régulière, on parvient à trouver les bons résultats. Mais on perd un peu le sens de la physique qui se cache derrière les calculs et c'est déconcertant.

Attention cher lecteur, maintenant, tout s'embrouille, et je ne suis pas sûr de la pertinence du reste de ce paragraphe. Il serait imprudent de croire, sans y réfélchir, à ce qui y est écrit... Au mieux c'est "vaseux", au pire c'est faux. Il est fort probable qu'un jour je supprime ou réécrive complètemment ces lignes.

Supposons donc que la conductivité a de "bonnes propriétés". En particulier, la dérivée de $\vec{\vec{\sigma}}(\vec{\mathbf{k}}, \omega)$ par rapport à ω doit exister. Or puisque l'on s'intéresse à des problèmes de stabilité, ω peut être complexe. Donc $\vec{\vec{\sigma}}(\vec{\mathbf{k}}, \omega)$ doit être holomorphe par rapport à ω. Or une fonction holomorphe est analytique, c'est à dire qu'on peut en faire un développement en série au voisinage de chaque point où elle est définie.

La théorie des transformées de Laplace montre que celles-ci ne sont pas définies pour toutes les valeurs de $\omega = \omega_r + i\gamma$, mais seulement dans le demi-plan des nombres dont la partie imaginaire γ excède une certaine valeur γ_c. Les transformées de Laplace sont des fonctions analytiques dans la partie où leur intégrale de définition converge. Ailleurs ($\gamma \leq \gamma_c$), on peut en général les prolonger analytiquement.

Appliquons celà au cas de la conductivité $\vec{\vec{\sigma}}(\vec{\mathbf{k}}, \omega)$. Pour γ suppérieur à une certaine valeur γ_c, la formule 5.7 est applicable : $\vec{\vec{\sigma}}(\vec{\mathbf{k}}, \omega)$ existe, et l'intégrale est définie (*i.e.* convergente). La fonction est analytique. Pour $\gamma < \gamma_c$, l'intégrale est divergente, et on ne peut plus employer la formule 5.7. Pourtant, le plasma peut être excité à de telles fréquences, la conductivité existe toujours (5.6 est vraie) et comme c'est une grandeur physique gentille, elle est dérivable, (*i.e.* holomorphe), donc analytique. Alors, pour $\gamma < \gamma_c$, $\vec{\vec{\sigma}}(\vec{\mathbf{k}}, \omega)$ ne peut être que le prolongement analytique de la fonction définie par l'intégrale de 5.7.

La morale de cette histoire est *très* importante : quand on fait des calculs dans l'espace des fréquences, on obtient des relations qui peuvent faire intervenir la conductivité. Or la conductivité n'est définie à partir des transformées de Fourier/Laplace que dans le domaine des fréquences dont la partie imaginaire est suppérieure à une certaine valeur γ_c. Donc si on s'intéresse à ce qui se passe pour des fréquences dont la partie imaginaire est inférieure ou égale à une certaine valeur γ_c (à déterminer), *il ne faut pas* utiliser ces formules, mais employer leur prolongement analytique.

On peut ne pas se contenter de cette morale. En fait, elle repose sur l'idé, énoncée au debut de cette section, qu'une fonction physique doit être gentille, infiniement dérivable. On verra par la suite que certaines solutions importantes de l'equation de maxwell-Vlasov (ou plus simplement de Poisson-Vlasov), ne vérifient pas cette propriété, même si on est parti de conditions initiales infiniement dérivables. Ce genre de solution appartient au domaine que les mathématiciens qualifient de solution faible. Pour en savoir plus, rendez vous au chapitre sur l'effet Landau.

5.3.3 Transformées de Fourier des équations de Maxwell

Lorsque l'on calcule la transformée de Fourier de la conductivité ou de lu tenseur diélectrique d'un plasma, il est généralement necéssaire d'employer la transformée de Fourier des équations de Maxwell. Ce sont les équations suivantes, où $\vec{\mathbf{E}}$, $\vec{\mathbf{B}}$, ainsi que les termes sources sont des fonctions de $\vec{\mathbf{k}}$, et ω représentatant les *perturbations* du champ électromagnétique (en faisant un développement asymptotique, on devrait accompagner d'un indice 0 le champ d'équilibre, et d'un indice 1 les champs apparaissant ci-dedssous) :

$$\vec{\mathbf{k}} \times \vec{\mathbf{E}} = \omega \vec{\mathbf{B}} \tag{5.8}$$

$$\vec{\mathbf{k}} \times \vec{\mathbf{B}} + i\mu_0 \vec{\mathbf{J}} + \frac{\omega}{c^2}\vec{\mathbf{E}} = 0 \tag{5.9}$$

$$i\vec{\mathbf{k}} \cdot \vec{\mathbf{E}} = \rho/\epsilon_0 \tag{5.10}$$

$$\vec{\mathbf{k}} \cdot \vec{\mathbf{B}} = 0 \tag{5.11}$$

Notons, du fait de la linéarité des équations de Maxwell, qu'il n'y a pas de mélange entre les champs à l'équilibre, et les perturbations traitées ci-dessus. C'est pour cela qu'on peut avec ces équations se dispenser d'indiquer les indices 0 et 1. La prise en compte des autres équations du plasma (non-linéaires) nous obligera à les réintroduire.

Les champs ci-dessus, fonctions de $\vec{\mathbf{k}}$, et ω, sont calculés à partir des champs dans l'espace réel à l'aide de transformations du type 5.4, 5.5. Comme les relations de Maxwell sont locales, (il n'y a pas de relation intégrale comme

3.72), ces relations sous forme Fourier ne posent aucun problème du type causalité, ou autre.

On qualifie de transverse la partie d'un vecteur orthogonale au vecteur d'onde. La relation 5.8 nous montre deux propriétés de la composante transverse du champ électrique $\vec{\mathbf{E}}_t$: elle est perpendiculaire à la perturbation du champ magnétique $\vec{\mathbf{B}}$ et

$$\frac{E_t}{B} = \frac{\omega}{k} = V_\phi. \tag{5.12}$$

Cette relation est intéressante, d'un point de vue expérimental, dans le cas d'une onde monochromatique ou dans le cas d'une onde non dispersive. En effet, V_ϕ est alors un nombre (et non une fonction de ω ou de k), et la mesure du rapport E_t/B peut permettre une caractérisation de l'onde. Dans le cas d'une onde électromagnétique dans le vide, on retrouve la constante c. Dans les plasmas, cette propriété est notament employée pour caractériser les ondes d'Alfvén, du moins tant qu'elles satisfont à la description qu'en donne la MHD (elles sont non dispersives dans l'approximation MHD).

5.3.4 Champ électrique dans le repère de l'onde

Les équations ci-dessus sont exprimées dans le repère d'un observateur. Il ne coïncide pas nécessairement avec le repère de l'onde (dans le repère de l'onde, $\omega = 0$). On peut aisément exprimer le champ électrique dans le repère de l'onde. Ce repère est défini par la vitesse de phase en module, et la direction $\vec{\mathbf{k}}/k$, donc la vitesse de ce repère est $(\omega/k^2)\vec{\mathbf{k}}$. Si la vitesse de phase de l'onde n'est pas relativiste, le champ $\vec{\mathbf{E}}'$ dans le repère de l'onde est donné par 3.56,et le $\vec{\mathbf{B}}$ y apparaissant est exprimé à partir de 5.8 :

$$\vec{\mathbf{E}}' = \vec{\mathbf{E}} + \frac{\omega\vec{\mathbf{k}}}{k^2} \times \vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{E}} + \frac{\omega\vec{\mathbf{k}}}{k^2} \times \frac{\vec{\mathbf{k}} \times \vec{\mathbf{E}}}{\omega}$$

Après les simplifications

$$\vec{\mathbf{E}}' = \frac{(\vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{k}})\vec{\mathbf{k}}}{k^2}. \tag{5.13}$$

C'est la projection du champ électrique sur la direction de propagation de l'onde. Dans le cas des ondes transverses, par définition, cette projection est nulle : le champ électrique dans le repère d'une onde transverse est nul, donc une particule résonnante avec une telle onde évolue à énergie constante dans ce repère. C'est une propriété qui intéresse ceux qui étudient les phénomènes d'accélération par résonnance des particules avec une onde.

Dans le cas relativiste (onde avec une grande vitesse de phase), la considération de la relation 3.53 nous incite à considérer une onde où $\vec{\mathbf{k}} = (k, 0, 0)$. (Cela ne nuit pas à la généralité du calcul.) Alors :

$$E'_x = E_x \tag{5.14}$$

$$E'_y = \gamma(E_y - \frac{\omega}{k}B_z) = \gamma(E_y - \frac{\omega}{k}\frac{k}{\omega}E_y) = 0 \tag{5.15}$$

$$E'_z = \gamma(E_z + \frac{\omega}{k}B_y) = \gamma(E_z - \frac{\omega}{k}\frac{k}{\omega}E_z) = 0. \tag{5.16}$$

Le résultat est identique au cas non relativiste : le champ électrique dans le repère de l'onde est sa projection dans la direction de propagation de celle-ci, c'est à dire la composante longitudinale du champ électrique.

5.3.5 Relation de dispersion linéaire dans un plasma homogène

L'équation de dispersion linéaire relie les caractéristiques de propagation d'une onde monochromatique. Dans le cas d'une onde plane, on relie $\vec{\mathbf{k}}$, à ω. En éliminant le champ magnétique des équations 3.32 et 3.33, on obtient

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{\mathbf{E}}) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{\mathbf{E}}}{\partial t^2} + \mu_0 \frac{\partial \vec{\mathbf{J}}}{\partial t} = 0. \tag{5.17}$$

La transformée de Fourier de cette relation est

$$\vec{\mathbf{k}} \times (\vec{\mathbf{k}} \times \vec{\mathbf{E}}) + \frac{\omega^2}{c^2}\vec{\mathbf{E}} - \mu_0 \mathrm{FT}(\frac{\partial \vec{\mathbf{J}}}{\partial t}) = 0. \tag{5.18}$$

Les grandeurs $\vec{\mathbf{E}}$ et $\vec{\vec{\sigma}}$ dépendent ici des variables $\vec{\mathbf{k}}$, et ω, et sont respectivement définies par les relations 5.4 et 5.7 ; FT désigne la transformée de Fourier. La densité de courant $\vec{\mathbf{J}}$ peut être reliée au champ électrique via une loi d'Ohm 3.29. Comme on est dans l'approximation linéaire, la conductivité $\vec{\vec{\sigma}}$ ne dépend que du plasma à l'équilibre, elle est donc indépendante du temps. L'expression $\partial\vec{\mathbf{J}}/\partial t$ est donc égale à $\vec{\vec{\sigma}}\partial\vec{\mathbf{E}}/\partial t$. On trouve, de façon analogue à 5.6,

$$\mathrm{FT}(\frac{\partial \vec{\mathbf{J}}}{\partial t}) = -i\omega\vec{\vec{\sigma}} \cdot \vec{\mathbf{E}}, \tag{5.19}$$

où $\vec{\vec{\sigma}}$ est défini par 5.7. L'équation du champ électrique s'écrit donc

$$\vec{\mathbf{k}} \times (\vec{\mathbf{k}} \times \vec{\mathbf{E}}) + \frac{\omega^2}{c^2}\vec{\mathbf{E}} + i\mu_0\omega\vec{\vec{\sigma}} \cdot \vec{\mathbf{E}} = 0. \tag{5.20}$$

Il est d'usage de faire intervenir le tenseur diélectrique, lié à la conductivité par 3.42. Une transformée de Fourier de cette relation montre que

$$\vec{\vec{\epsilon}} = \epsilon_0 (1 + i \frac{\vec{\vec{\sigma}}}{\omega \epsilon_0}). \tag{5.21}$$

où $\vec{\vec{\epsilon}}$ est défini par une relation analogue à 5.7. L'équation du champ électrique devient

$$\vec{\mathbf{k}} \times (\vec{\mathbf{k}} \times \vec{\mathbf{E}}) + \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\vec{\vec{\epsilon}}}{\epsilon_0} \cdot \vec{\mathbf{E}} = 0. \tag{5.22}$$

Il est possible de projetter cette relation sur des axes, on obtient une équation matricielle. Il est d'un usage assez pratique de projetter le champ magnétique externe $\vec{\mathbf{B}}_0$ sur la composante z d'un repère orthonormé, et de projetter le vecteur d'onde $\vec{\mathbf{k}}$ sur les composantes x et z ; $\vec{\mathbf{B}}_0 = (0, 0, B_0)$ et $\vec{\mathbf{k}} = (k_x, 0, k_z) = (k_\perp, 0, k_\parallel)$. L'équation du champ électrique a la forme :

$$\vec{\vec{\mathbf{D}}} \cdot \vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{0}} \tag{5.23}$$

où $\vec{\vec{\mathbf{D}}}$ est le tenseur

$$\vec{\vec{\mathbf{D}}} = \begin{pmatrix} \omega^2 \epsilon_{xx}/c^2\epsilon_0 - k_z^2 & \omega^2 \epsilon_{xy}/c^2\epsilon_0 & \omega^2 \epsilon_{xz}/c^2\epsilon_0 + k_x k_z \\ \omega^2 \epsilon_{yx}/c^2\epsilon_0 & \omega^2 \epsilon_{yy}/c^2\epsilon_0 - k_x^2 - k_z^2 & \omega^2 \epsilon_{yz}/c^2\epsilon_0 \\ \omega^2 \epsilon_{zx}/c^2\epsilon_0 + k_x k_z & \omega^2 \epsilon_{zy}/c^2\epsilon_0 & \omega^2 \epsilon_{zz}/c^2\epsilon_0 - k_x^2 \end{pmatrix} \tag{5.24}$$

Pour trouver une solution $\vec{\mathbf{E}}$ non triviale, il faut que ce déterminant soit nul. L'équation de dispersion linéaire pour un plasma homogène a donc la forme

$$\begin{vmatrix} \omega^2 \epsilon_{xx}/c^2\epsilon_0 - k_z^2 & \omega^2 \epsilon_{xy}/c^2\epsilon_0 & \omega^2 \epsilon_{xz}/c^2\epsilon_0 + k_x k_z \\ \omega^2 \epsilon_{yx}/c^2\epsilon_0 & \omega^2 \epsilon_{yy}/c^2\epsilon_0 - k^2 & \omega^2 \epsilon_{yz}/c^2\epsilon_0 \\ \omega^2 \epsilon_{zx}/c^2\epsilon_0 + k_x k_z & \omega^2 \epsilon_{zy}/c^2\epsilon_0 & \omega^2 \epsilon_{zz}/c^2\epsilon_0 - k_x^2 \end{vmatrix} \tag{5.25}$$

En termes de vecteur d'onde parallel et perpendiculaire, ou d'angle θ entre l'axe des z et le vecteur d'onde, de telle sorte que $\vec{\mathbf{k}} = (k\cos(\theta), 0, k\sin(\theta))$:

$$\begin{vmatrix} \omega^2 \epsilon_{xx}/c^2\epsilon_0 - k_\parallel^2 & \omega^2 \epsilon_{xy}/c^2\epsilon_0 & \omega^2 \epsilon_{xz}/c^2\epsilon_0 + k_\perp k_\parallel \\ \omega^2 \epsilon_{yx}/c^2\epsilon_0 & \omega^2 \epsilon_{yy}/c^2\epsilon_0 - k^2 & \omega^2 \epsilon_{yz}/c^2\epsilon_0 \\ \omega^2 \epsilon_{zx}/c^2\epsilon_0 + k_\perp k_\parallel & \omega^2 \epsilon_{zy}/c^2\epsilon_0 & \omega^2 \epsilon_{zz}/c^2\epsilon_0 - k_\perp^2 \end{vmatrix} \tag{5.26}$$

ou encore

$$\begin{vmatrix} \omega^2 \epsilon_{xx}/c^2\epsilon_0 - k^2 C^2 & \omega^2 \epsilon_{xy}/c^2\epsilon_0 & \omega^2 \epsilon_{xz}/c^2\epsilon_0 + k^2 CS \\ \omega^2 \epsilon_{yx}/c^2\epsilon_0 & \omega^2 \epsilon_{yy}/c^2\epsilon_0 - k^2 & \omega^2 \epsilon_{yz}/c^2\epsilon_0 \\ \omega^2 \epsilon_{zx}/c^2\epsilon_0 + k^2 CS & \omega^2 \epsilon_{zy}/c^2\epsilon_0 & \omega^2 \epsilon_{zz}/c^2\epsilon_0 - k^2 S^2 \end{vmatrix} \tag{5.27}$$

où $C = \cos(\theta)$ et $S = \sin(\theta)$.

On a pris ici le parti d'obtenir l'équation de dispersion en éliminant toutes les variables sauf le champ électrique $\vec{\mathbf{E}}$. Il y a d'autres possibliltés. Par exemple, l'équation de dispersion des ondes MHD (chapitre 9) s'établit plus facilement en gardant le champ des vitesses du plasma.

5.3.6 Cas particulier des ondes électrostatiques

Contrairement au cas des ondes dans le vide, il existe dans les plasmas des ondes dont le vecteur $\mathbf{k}$ est aligné avec le champ électrique de l'onde. Ces ondes sont crées par des déplacements de charges engendrant une modulation de la densité de charges, et n'engendrent aucun courant électrique. De 5.8 on déduit que pour de telles ondes, le champ magnétique est nul, on qualifie donc ces ondes d'électrostatiques. D'après 5.22 et du fait que $\vec{\mathbf{k}} \times \vec{\mathbf{E}} = 0$, leur équation de dispersion s'écrit simplement

$$\vec{\vec{\epsilon}} = 0. \tag{5.28}$$

On peut redémontrer cette équation à partir de la définition de la conductivité du plasma, de 5.21 et l'équation de maxwell-Gauss 5.10.

5.3.7 Ondes électrostatiques instables ou amorties

Il se trouve que bien souvent, par exemple dans le cas de l'effet Landau, ϵ possède une partie réelle ϵ_r et imaginaire ϵ_i et que la résolution de $\epsilon_r = 0$ donne une solution réelle ω_r qui est une bonne approximation de la solution exacte ω. Mais comme ω a dans ce cas une partie imaginiare, qui bien que petite, change tout, on veut connaître une meilleure approximation de la fréquence que ω_r. Voici comment on fait. On réécrit 5.28 sous la forme

$$\epsilon_r(\omega) + i\epsilon_i(\omega) = 0. \tag{5.29}$$

et on considère que la solution (réelle) ω_r de $\epsilon_r(\omega) = 0$ est une approximation convenable de la partie réelle de la solution exacte. On cherche une approximation meilleure $\omega = \omega_r + \delta\omega_r + i\gamma$. On se fonde sur le développement limité de ϵ au voisinage de ω_r :

$$\epsilon(\omega) = \epsilon(\omega_r) + (\delta\omega_r + i\gamma)\frac{\partial\epsilon}{\partial\omega}(\omega_r) = 0. \tag{5.30}$$

En séparant les parties réelles et imaginaires,

$$\epsilon_r(\omega_r) + \delta\omega_r \partial_\omega \epsilon_r(\omega_r) - \gamma \partial_\omega \epsilon_i(\omega_r) = 0 \tag{5.31}$$
$$\epsilon_i(\omega_r) + \delta\omega_r \partial_\omega \epsilon_i(\omega_r) + \gamma \partial_\omega \epsilon_r(\omega_r) = 0 \tag{5.32}$$

La résolution est aisée :

$$\delta\omega_r = -\frac{\epsilon_i \partial_\omega \epsilon_i}{(\partial_\omega \epsilon_r)^2 + (\partial_\omega \epsilon_i)^2} \tag{5.33}$$
$$\gamma = -\frac{\epsilon_i \partial_\omega \epsilon_r}{(\partial_\omega \epsilon_r)^2 + (\partial_\omega \epsilon_i)^2}. \tag{5.34}$$

Dans le cas répandu où $\partial_\omega \epsilon_i \ll \partial_\omega \epsilon_r$, le rséultat se simplifie : la correction de la fréquence réelle devient négligeable, et

$$\gamma = -\frac{\epsilon_i(\omega_r)}{\partial_\omega \epsilon_r(\omega_r)}.. \tag{5.35}$$

5.4 Equations de dispersion, approche par transformée de Fourier-Laplace

La transformée de Fourier est la méthode la plus couramment employée pour résoudre l'équation de dispersion linéaire des ondes dans un plasma. Néanmoins, cette méthode est moins triviale qu'elle en a l'air du fait que certaines grandeurs définies de façon non locale (ici, la conductivité) n'apparaissent pas comme une transformée de Fourier mais comme une transformée de Fourier-Laplace. Comme toutes les transformées de Laplace, celle-ci n'est pas définie pour toutes les fréquences du plan complexe et il faut avoir recours à des prolongements analytiques. En outre, la notion de conditions initiales n'apparait pas avec les transformées de Fourier : on ne traite que de régime assymptotique.

Une autre approche consiste à considérer le système en équilibre forcé jusqu'au temps $t = 0$. A $t = 0$ on libère le système et on le laisse évoluer spontanément. Les perturbations des grandeurs physiques sont donc maintenues à zéro pour des temps négatifs, et peuvent prendre d'autres valeurs à partir de zéro. On traite ce système avec des transformées de Fourier. Mais comme les grandeurs ne sont non nulles qu'à partir de $t = 0$, l'intégration sur le temps se fera non pas de $-\infty$ à $+\infty$, mais de 0 à $+\infty$. Par exemple, le champ électrique et le courant ne seront plus définis par 5.4 et 5.5 mais par

$$\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{k}},\omega) = \int_V d\vec{\mathbf{r}} \int_0^{+\infty} dt \vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}},t) \exp\left(i(\omega t - \vec{\mathbf{k}}\cdot\vec{\mathbf{r}})\right) \tag{5.36}$$

$$\vec{\mathbf{J}}(\vec{\mathbf{k}},\omega) = \int_V d\vec{\mathbf{r}} \int_0^{+\infty} dt \vec{\mathbf{J}}(\vec{\mathbf{r}},t) \exp\left(i(\omega t - \vec{\mathbf{k}}\cdot\vec{\mathbf{r}})\right). \tag{5.37}$$

On appelle alors ces intégrales des transformées de Fourier-Laplace (Fourier sur la variable d'espace, Laplace sur la variable temporelle). Les livres taitant de la transformée de Laplace n'utilisent pas exactement la fréquence, mais une variable complexe, souvent notée p ou s telle que $p = s = i\omega$. Attention aux permutations des axes réel et imaginaire...

Que deviennent les équations du plasmas en transformées de Fourier-Laplace ?

5.4.1 Transformées de Fourier-Laplace des équations de Maxwell

Les équations de Maxwell ont la même forme en Fourier et en Fourier-Laplace. On peut donc continuer à employer 5.8, 5.9, 5.10 et 5.11.

La loi d'Ohm dans l'espace réel ne s'écrit plus avec 3.72 mais

$$\vec{\mathbf{J}}(\vec{\mathbf{r}},t) = \int_V d\vec{\mathbf{r}}' \int_0^t dt' \vec{\vec{\sigma}}(\vec{\mathbf{r}},\vec{\mathbf{r}}',t,t') \cdot \vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}',t'), \tag{5.38}$$

les perturbations dues au champ électrique ne devant être comptées qu'à partir de $t = 0$ (et plus $t = -\infty$).

5.4.2 La transformée de Fourier-Laplace de la loi d'Ohm

On va montrer des relations analogues à 5.6 et 5.7 à partir de la loi d'Ohm dans l'espace des configurations 5.38 et des définitions des transformées de Fourier-Laplace 5.36 et 5.37. Ce calcule présente de nombreuses analogies avec celui de la section 5.3.1, mais le résultat présente des différences importantes.

Partons de la définition du courant $\vec{\vec{\sigma}}(\vec{\mathbf{k}},\omega)$ et incluons la définition de la conductivité 5.38 :

$$\vec{\mathbf{J}}(\vec{\mathbf{k}},\omega) = \int_V d\vec{\mathbf{r}} \int_0^{+\infty} dt \int_V d\vec{\mathbf{r}}' \int_0^t dt' \vec{\vec{\sigma}}(\vec{\mathbf{r}}-\vec{\mathbf{r}}',t-t')\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}',t') e^{i(\omega t - \vec{\mathbf{k}}\cdot\vec{\mathbf{r}})}$$

On décompose l'exponentielle avec les variables $\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'$, $t - t'$ d'une part et $\vec{\mathbf{r}}'$,t' d'autre part. On fait le changement de variables $\vec{\rho} = \vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'$, $\tau = t - t'$, on regroupe les intégrations sur le temps :

$$\int_V d\vec{\mathbf{r}} \int_V d\vec{\rho} \int_0^{+\infty} dt \int_0^t d\tau \vec{\vec{\sigma}}(\vec{\rho}, \tau) \vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}} - \vec{\rho}, t - \tau) e^{i(\omega\tau - \vec{\mathbf{k}} \cdot \vec{\rho})} e^{i(\omega(t-\tau) - \vec{\mathbf{k}} \cdot (\vec{\mathbf{r}} - \vec{\rho}))}$$

L'intégration par rapport à τ de 0 à t peut se faire de 0 à $+\infty$, car pour $\tau > t$, le champ $\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}} - \vec{\rho}, t - \tau)$ est nul et ne change donc rien à la valeur de l'intégrale. On peut alors inverser l'ordre des intégrations sur t et τ, et sur $\vec{\mathbf{r}}$ et $\vec{\rho}$. On fait les changements de variables $\vec{\mathbf{r}} - \vec{\rho} = \vec{\mathbf{p}}$, $t - \tau = s$

$$\vec{\mathbf{J}}(\vec{\mathbf{k}}, \omega) = \int_V d\vec{\rho} \int_0^{+\infty} d\tau \vec{\vec{\sigma}}(\vec{\rho}, \tau) e^{i(\omega\tau - \vec{\mathbf{k}} \cdot \vec{\rho})} \int_V d\vec{\mathbf{p}} \int_{-\tau}^{+\infty} ds \vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{p}}, s) e^{i(\omega s - \vec{\mathbf{k}} \cdot \vec{\mathbf{p}})}.$$

Comme $\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{p}}, s) = 0$ pour $s \leq 0$, l'intégration sur s peut se faire de 0 à $+\infty$. Cette relation s'écrit alors

$$\vec{\mathbf{J}}(\vec{\mathbf{k}}, \omega) = \vec{\vec{\sigma}}(\vec{\mathbf{k}}, \omega) \vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{k}}, \omega) \tag{5.39}$$

où $\vec{\mathbf{J}}(\vec{\mathbf{k}}, \omega)$, $\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{k}}, \omega)$ et $\vec{\vec{\sigma}}(\vec{\mathbf{k}}, \omega)$ sont les transformée de Fourier-Laplace (données par 5.37 et 5.36 pour le courant et le champ électrique).

5.4.3 Domaine de définition des transformées de Fourier-Laplace

On reprend des calculs analogues à ceux de la section 5.6, *avec les même réserves*. Mais alors que l'on discutait de la convergence et de l'analycité de la conductivité, ici on s'occupe de toutes les grandeurs physiques (comme quoi les définitons des transformées de Fourier et de Fourier-Laplace ont beau avoir la même tête, leurs propriétés ne se ressemblent que si on les regarde de loin). D'après la théorie sur la convergence des transformées de Laplace, les formules obtenues avec les transformées de Fourier-Laplace sont valables pour des fréquences dont la partie imaginaire γ excède une certaine valeur critique γ_c (à déterminer). Si $\gamma \leq \gamma_c$, il faut employer le prolongement analytique de ces formules.

Chapitre 6

Développements asymptotiques pour les plasmas

6.1 Méthode multi-échelle

On se propose de résoudre l'équation

$$\frac{dz}{dt} = f(z, t, \epsilon) \tag{6.1}$$

où f est une fonction non-linéaire, dépendant d'un petit paramètre ϵ, et dont on connait une solution pour $\epsilon = 0$. La variable z peut être un scalaire, un vecteur...

On suppose en outre que la solution pour $\epsilon = 0$ est une solution oscillante, de haute fréquence ω_0.

On souhaite, si possible obtenir des équations séparées pour la solution de haute fréquence (modifiée par ϵ) et une solution lente. On se contente d'équations approchées, à un ordre fixé par rapport à ϵ.

Le fondement de la méthode multi-échelles consiste à transformer la variable temps t en une somme de deux variables (ou plus) : t pour les solutions $Z(t)$ variant lentement [1], et $\tau = t/\epsilon$ associée aux variations rapides $\zeta(t, \tau)$. Comme on a introduit un degré arbitraire, on le contraint en exigeant que la variable $\zeta(t, \tau)$ ait une moyenne nulle sur une durée de l'ordre de τ. Plus généralement, on exige que toute fonction dépendant de τ ait une moyenne

[1] on ne change pas le nom par paresse, on lieu de t on aurait pu choisir T ou "Gilbert"

nulle. Par définition, la moyenne d'une grandeur a est définie par

$$\langle a(t,\tau)\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T a(t,\tau')d\tau' \quad (6.2)$$

avec, en général $T = \tau$ ou bien (ça servira par la suite) $T >> \tau$. En résumé, on fait les changements de variable suivants

$$\begin{aligned} t &\rightarrow t + \tau/\epsilon & (6.3)\\ z(t) &= Z(t) + \zeta(Z,t,\tau) & (6.4)\end{aligned}$$

La partie rapide de z, ζ, dépend de la partie lente. Ce qui est intéressant, c'est que la partie lente de la solution ne dépende pas de la partie rapide. Cela confère une sorte d'autonomie à la descritpion du mouvement lent. Cela n'est pas forcément possible, mais on se place dans cette hypothèse qui est la raison fondamentale de l'intérêt de ce développement asymptotique. On impose

$$\langle \zeta(t,\tau)\rangle = 0. \quad (6.5)$$

Il vient naturellement

$$\langle Z(t)\rangle = Z(t). \quad (6.6)$$

La dérivée par rapport au temps et l'équation 6.1 deviennent

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} \rightarrow \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{d\tau}{dt}\frac{\partial z}{\partial \tau} &= \frac{dz}{dt} \rightarrow \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{1}{\epsilon}\frac{\partial z}{\partial \tau}, & (6.7)\\ \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{1}{\epsilon}\frac{\partial z}{\partial \tau} &= f(z,t,\epsilon). & (6.8)\end{aligned}$$

On fait alors un développement limité en fonction du petit paramètre ϵ. Celui de la fonction f est connu *a priori*, on résoudra les équations asymptotiques pour connaitre ceux de Z et de $\zeta(t,\tau)$.

$$\begin{aligned} f(z,t,\tau) &= \frac{1}{\epsilon}f_{-1}(Z,t,\tau) + f_0(Z,t,\tau) + f_1(Z,t,\tau) + f_2(Z,t,\tau) + ... & (6.9)\\ Z(t) &= Z_0(t) + \epsilon Z_1(t) + \epsilon^2 Z_2(t) + ... & (6.10)\\ \zeta(Z,t,\tau) &= \zeta_0(Z,t,\tau) + \epsilon\zeta_1(Z,t,\tau) + \epsilon^2\zeta_2(Z,t,\tau) + ... & (6.11)\end{aligned}$$

On a fait le choix important de développer f autour de Z (composante lente) et pas de z. Si on résoud l'équation à l'ordre n, on choisira d'effectuer ce développement au voisinage de Z_n. Si ζ est d'un ordre inférieur à Z (par exemple,

$Z_0 \neq 0$ mais $\zeta_0(t,\tau) = 0$), on peut obtenir ce développement de manière classique avec la formule de Taylor (et les dérivées successives de f en Z). Mais si ζ est du même ordre que Z (par exemple $\zeta_0(t,\tau) \neq 0$), il faut recourir à d'autres méthodes, ou avoir la chance de pouvoir accomplir un développement purement additif exact (cela sera expliqué plus clairement dans des parties ultérieures du chapitre). Le choix d'un terme $f_{-1}(t,\tau)$ est autorisé par l'existence d'un terme d'ordre -1 dans la dérivée de z par rapport à τ. Ce terme peut être nul, suivant le problème traité.

On peut à présent développer 6.8 et regrouper les termes suivant le dégré en ϵ. Voici les équations associées à ϵ^{-1}, ϵ^0, et ϵ^1,

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\zeta_0(t,\tau) = f_{-1}(Z,t,\tau), \tag{6.12}$$

$$\frac{d}{dt}Z_0(t) + \frac{\partial}{\partial t}\zeta_0(Z,t,\tau) + \frac{\partial}{\partial \tau}\zeta_1(Z,t,\tau) = f_0(Z,t,\tau), \tag{6.13}$$

$$\frac{d}{dt}Z_1(t) + \frac{\partial}{\partial t}\zeta_1(Z,t,\tau) + \frac{\partial}{\partial \tau}\zeta_2(Z,t,\tau) = f_1(Z,t,\tau). \tag{6.14}$$

En effectuant la moyenne (au sens de l'équation 6.2) de ces équations, on obtient les équations du mouvement lent (associé à la variable temporelle t)

$$0 = \langle f_{-1}(Z,t,\tau)\rangle\,, \tag{6.15}$$

$$\frac{d}{dt}Z_0(t) = \langle f_0(Z,t,\tau)\rangle\,, \tag{6.16}$$

$$\frac{d}{dt}Z_1(t) = \langle f_1(Z,t,\tau)\rangle\,. \tag{6.17}$$

et en soustrayant ceci aux équations à (6.12–6.14), on obtient les équations du mouvement rapide

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\zeta_0(Z,t,\tau) = f_{-1}(Z,t,\tau) - \langle f_{-1}(Z,t,\tau)\rangle\,, \tag{6.18}$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\zeta_1(Z,t,\tau) = f_0(Z,t,\tau) - \langle f_0(Z,t,\tau)\rangle - \frac{\partial}{\partial t}\zeta_0(t,\tau), \tag{6.19}$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\zeta_2(Z,t,\tau) = f_1(Z,t,\tau) - \langle f_1(Z,t,\tau)\rangle - \frac{\partial}{\partial t}\zeta_1(t,\tau). \tag{6.20}$$

La solution de l'équation rapide est entièrement déterminée par les équations ci-dessus et la condition de nullité de la moyenne. Par exemple, la solution générale de l'équation 6.18 est $\zeta_0(t,\tau) = k(t) + \int_0^\tau [f_{-1}(Z,t,\tau') -$

$\langle f_{-1}(Z,t,\tau')\rangle]d\tau'$. Comme la moyenne de $\zeta_0(t,\tau)$ doit être nulle ; comme l'intégrale (d'une fonction de moyenne nulle) a une moyenne constante, il faut $\langle k(t)\rangle = 0$. Comme cette fonction ne dépend pas de τ, elle est nécessairement nulle. La solution rapide à l'ordre le plus bas est donc

$$\zeta_0(t,\tau) = \int_0^\tau [f_{-1}(Z,t,\tau) - \langle f_{-1}(Z,t,\tau)\rangle]d\tau. \tag{6.21}$$

6.2 Méthode multi-échelle pour les équations newtoniennes du mouvement

En physique des plasmas, il est rare de chercher à résoudre une équation ordinnaire, et la variable z est généralement un vecteur qui peut désigner à la fois une position et une vitesse (cas de l'équation du mouvement d'une particule), ou bien une suite de moments de la fonction de distribution (cas de développement en théorie de type fluide).

Dans le cas d'une équation Newtonienne du mouvement, comme celle de Lorentz 7.1, $z(t) = (\vec{\mathbf{r}}(t), \vec{\mathbf{v}}(t))$, l'équation s'écrit

$$\frac{d}{dt}\vec{\mathbf{r}}(t) = \vec{\mathbf{v}}(t) \tag{6.22}$$

$$\frac{d}{dt}\vec{\mathbf{v}}(t) = \vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{r}}, \vec{\mathbf{v}}, t). \tag{6.23}$$

On peut adapter les notations des développements 6.4, 6.10, 6.11,

$$\vec{\mathbf{r}}(t) = \vec{\mathbf{R}}_0(t) + \vec{\rho}_0(\vec{\mathbf{R}}, \vec{\mathbf{V}}, t) + \epsilon(\vec{\mathbf{R}}_1(t) + \vec{\rho}_1(\vec{\mathbf{R}}, \vec{\mathbf{V}}, t)) + ... \tag{6.24}$$

$$\vec{\mathbf{v}}(t) = \vec{\mathbf{U}}_0(t) + \vec{\mathbf{u}}_0(\vec{\mathbf{R}}, \vec{\mathbf{V}}, t) + \epsilon(\vec{\mathbf{U}}_1(t) + \vec{\mathbf{u}}_1(\vec{\mathbf{R}}, \vec{\mathbf{V}}, t)) + ... \tag{6.25}$$

L'équation définissant la vitesse 6.22 se développe facilement aux trois premiers ordres

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\vec{\rho}_0(\vec{\mathbf{R}}, \vec{\mathbf{V}}, t) = 0, \quad \text{d'où} \quad \vec{\rho}_0(\vec{\mathbf{R}}, \vec{\mathbf{V}}, t) = 0, \tag{6.26}$$

$$\frac{d}{dt}\vec{\mathbf{R}}_0(t) + \frac{\partial}{\partial\tau}\vec{\rho}_1(\vec{\mathbf{R}}, \vec{\mathbf{V}}, t) = \vec{\mathbf{U}}_0(t) + \vec{\mathbf{u}}_0(\vec{\mathbf{R}}, \vec{\mathbf{V}}, t), \tag{6.27}$$

$$\frac{d}{dt}\vec{\mathbf{R}}_1(t) + \frac{\partial}{\partial t}\vec{\rho}_1(\vec{\mathbf{R}}, \vec{\mathbf{V}}, t) + \frac{\partial}{\partial\tau}\vec{\rho}_2 = \vec{\mathbf{U}}_1(t) + \vec{\mathbf{u}}_1(\vec{\mathbf{R}}, \vec{\mathbf{V}}, t). \tag{6.28}$$

En séparant les mouvement lents

$$\frac{d}{dt}\vec{\mathbf{R}}_0(t) = \vec{\mathbf{U}}_0(t), \tag{6.29}$$
$$\frac{d}{dt}\vec{\mathbf{R}}_1(t) = \vec{\mathbf{U}}_1(t), \tag{6.30}$$

et les rapides

$$\vec{\rho}_0(\vec{\mathbf{R}}, \vec{\mathbf{V}}, t) = 0, \tag{6.31}$$
$$\frac{\partial}{\partial \tau}\vec{\rho}_1(\vec{\mathbf{R}}, \vec{\mathbf{V}}, t) = \vec{\mathbf{u}}_0(\vec{\mathbf{R}}, \vec{\mathbf{V}}, t). \tag{6.32}$$

L'équation de la vitesse est, aux ordres ϵ^{-1}, ϵ^0, et ϵ^1,

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\vec{\mathbf{u}}_0(\vec{\mathbf{R}}, t, \tau) = F_{-1}(\vec{\mathbf{R}}, \vec{\mathbf{V}}, t, \tau), \tag{6.33}$$
$$\frac{d}{dt}\vec{\mathbf{U}}_0(t) + \frac{\partial}{\partial t}\vec{\mathbf{u}}_0(\vec{\mathbf{R}}, t, \tau) + \frac{\partial}{\partial \tau}\vec{\mathbf{u}}_1(\vec{\mathbf{R}}, t, \tau) = F_0(\vec{\mathbf{R}}, \vec{\mathbf{V}}, t, \tau), \tag{6.34}$$
$$\frac{d}{dt}\vec{\mathbf{U}}_1(t) + \frac{\partial}{\partial t}\vec{\mathbf{u}}_1(\vec{\mathbf{R}}, t, \tau) + \frac{\partial}{\partial \tau}\vec{\mathbf{u}}_2(\vec{\mathbf{R}}, t, \tau) = F_1(\vec{\mathbf{R}}, \vec{\mathbf{V}}, t, \tau). \tag{6.35}$$

ces trois équations dépendent évidemment du développement du terme de force F. Comme on a vu dans le cas général (avec z) et celui de la position, ces équations se séparent chacune en une partie lente, et une rapide.

Pour caractériser différents problèmes, il faut définir les termes du développement de la force F.

6.3 Particule en présence d'une onde, force pondéromotrice

On considère le cas d'une onde électromagnétique de haute fréquence ω_r dans un plasma non magnétisé le champ électrique ayant la forme

$$\vec{\mathbf{E}}_0(\vec{\mathbf{r}}) \cos{(\omega_r t - \vec{\mathbf{k}} \cdot \vec{\mathbf{r}})} = \vec{\mathbf{E}}_0(\vec{\mathbf{r}}) \cos{(\omega \tau - \vec{\mathbf{k}} \cdot \vec{\mathbf{r}})} \tag{6.36}$$

L'équation de la vitesse est

$$\frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt} = \frac{q}{m}[\vec{\mathbf{E}}_0(\vec{\mathbf{r}}) \cos(\omega \tau - \vec{\mathbf{k}} \cdot \vec{\mathbf{r}}) + \vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}}(\vec{\mathbf{r}}, t)]. \tag{6.37}$$

Soit ω_l une fréquence caractérisant l'ordre de grandeur pour la durée des phénomènes lents. On définit le petit paramètre $\epsilon = \omega_l/\omega_r$. On applique la séparation des échelles de temps 6.3, et on définit $\omega = \epsilon\omega_r$. On suppose que la vitesse de phase de l'onde est supérieure à la vitesse de la particule (onde en propagation rapide) de manière à ce que $v/v_\phi \sim \epsilon$, donc $vk/\omega_r \sim \epsilon$. On suppose que les variations spatiales de $\vec{\mathbf{E}}_0(\vec{\mathbf{r}})$ sont faibles. Avec l'équation de Faraday 3.32, on peut comparer les grandeurs des champs électrique et magnétique : la solution (5.3) est rappellée ici (on a supprimé le champ ambiant, conformément à l'hypothèse d'un plasma non magnétisé),

$$\vec{\mathbf{B}}(\vec{\mathbf{r}},t) = \frac{\vec{\mathbf{k}}}{\omega_r} \times \vec{\mathbf{E}}_0(\vec{\mathbf{r}}) \cos(\omega_r t - \vec{\mathbf{k}}\cdot\vec{\mathbf{r}}) - \frac{1}{\omega_r}\nabla\times\vec{\mathbf{E}}_0(\vec{\mathbf{r}}) \sin(\omega_r t - \vec{\mathbf{k}}\cdot\vec{\mathbf{r}}) \quad (6.38)$$

$$= \epsilon\frac{\vec{\mathbf{k}}}{\omega} \times \vec{\mathbf{E}}_0(\vec{\mathbf{r}}) \cos(\omega\tau - \vec{\mathbf{k}}\cdot\vec{\mathbf{r}}) - \frac{\epsilon}{\omega}\nabla\times\vec{\mathbf{E}}_0(\vec{\mathbf{r}}) \sin(\omega\tau - \vec{\mathbf{k}}\cdot\vec{\mathbf{r}}) \quad (6.39)$$

on développe les champs électrique et magnétique à l'ordre 1 par rapport au champ électrique. La position $\vec{\mathbf{R}}$ vaut $\vec{\mathbf{R}} = R0$, ou $\vec{\mathbf{R}} = R0 + R1$ suivant qu'on calcule à l'ordre le plus bas ou le suivant.

$$\begin{aligned} E_0(\vec{\mathbf{r}})\cos(\omega\tau - \vec{\mathbf{k}}\cdot\vec{\mathbf{r}}) &= E_0(\vec{\mathbf{R}})\cos(\omega\tau - \vec{\mathbf{k}}\cdot\vec{\mathbf{R}}) && (6.40)\\ &\quad +\epsilon(\vec{\rho}_1\cdot\nabla)\vec{\mathbf{E}}_0(\vec{\mathbf{R}})\cos(\omega\tau - \vec{\mathbf{k}}\cdot\vec{\mathbf{R}}) \\ &\quad +\epsilon(\vec{\mathbf{k}}\cdot\vec{\rho}_1)\vec{\mathbf{E}}_0(\vec{\mathbf{R}})\sin(\omega\tau - \vec{\mathbf{k}}\cdot\vec{\mathbf{R}}) \\ & && (6.41)\end{aligned}$$

$$\vec{\mathbf{B}}(\vec{\mathbf{r}},t) = \epsilon\frac{\vec{\mathbf{k}}}{\omega}\times\vec{\mathbf{E}}_0(\vec{\mathbf{R}})\cos(\omega\tau - \vec{\mathbf{k}}\cdot\vec{\mathbf{R}}) - \frac{\epsilon}{\omega}\nabla\times\vec{\mathbf{E}}_0(\vec{\mathbf{R}})\sin(\omega\tau - \vec{\mathbf{k}}\cdot\vec{\mathbf{R}}) \quad (6.42)$$

On intègre cela dans l'équation de la vitesse, en développant la vitesse. Dans le membre de droite, on développe la vitesse à l'ordre zéro, par ce qu'elle intervient toujours multipliée par un facteur d'ordre 1 au moins.

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt} = \frac{q}{m}[&\vec{\mathbf{E}}_0(\vec{\mathbf{R}})\cos(\omega\tau - \vec{\mathbf{k}}\cdot\vec{\mathbf{R}}) \qquad (6.43)\\ &+\epsilon(\vec{\rho}_1\cdot\nabla)\vec{\mathbf{E}}_0(\vec{\mathbf{R}})\cos(\omega\tau - \vec{\mathbf{k}}\cdot\vec{\mathbf{R}}) \\ &+\epsilon\vec{\mathbf{k}}\cdot\vec{\rho}_1\vec{\mathbf{E}}_0(\vec{\mathbf{R}})\sin(\omega\tau - \vec{\mathbf{k}}\cdot\vec{\mathbf{R}}) \\ &+(\vec{\mathbf{U}}_0 + \vec{\mathbf{u}}_0)\times\epsilon\frac{\vec{\mathbf{k}}}{\omega}\times\vec{\mathbf{E}}_0(\vec{\mathbf{R}})\cos(\omega\tau - \vec{\mathbf{k}}\cdot\vec{\mathbf{R}}) \\ &-(\vec{\mathbf{U}}_0 + \vec{\mathbf{u}}_0)\times\frac{\epsilon}{\omega}\nabla\times\vec{\mathbf{E}}_0(\vec{\mathbf{R}})\sin(\omega\tau - \vec{\mathbf{k}}\cdot\vec{\mathbf{R}})]\end{aligned}$$

D'après l'Eq. (6.33) aura une accélération non nulle à l'ordre ϵ^{-1} si $\frac{q}{m}\vec{\mathbf{E}}_0(\vec{\mathbf{R}})$ est aussi d'ordre ϵ^{-1}. Dans ce cas, à l'ordre ϵ^{-1},

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\vec{\mathbf{u}}_0(t,\tau) = \frac{q}{m}\vec{\mathbf{E}}_0(\vec{\mathbf{R}})\cos(\omega\tau - \vec{\mathbf{k}}\cdot\vec{\mathbf{R}}) \tag{6.44}$$

dont la solution de moyenne nulle (avec l'équation 6.32) est

$$\vec{\mathbf{u}}_0(t,\tau) = \frac{q}{m\omega}\vec{\mathbf{E}}_0(\vec{\mathbf{R}})\sin(\omega\tau - \vec{\mathbf{k}}\cdot\vec{\mathbf{R}}) \tag{6.45}$$

$$\vec{\rho}_1(t,\tau) = -\frac{q}{m\omega^2}\vec{\mathbf{E}}_0(\vec{\mathbf{R}})\cos(\omega\tau - \vec{\mathbf{k}}\cdot\vec{\mathbf{R}}) \tag{6.46}$$

A l'ordre zéro,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\vec{\mathbf{U}}_0(t) + \frac{\partial}{\partial t}\vec{\mathbf{u}}_0 + \frac{\partial}{\partial \tau}\vec{\mathbf{u}}_1 = \frac{q}{m}[&(\vec{\rho}_1\cdot\nabla)\vec{\mathbf{E}}_0(\vec{\mathbf{R}})\cos(\omega\tau - \vec{\mathbf{k}}\cdot\vec{\mathbf{R}})\\ &+\vec{\mathbf{k}}\cdot\vec{\rho}_1\vec{\mathbf{E}}_0(\vec{\mathbf{R}})\sin(\omega\tau - \vec{\mathbf{k}}\cdot\vec{\mathbf{R}}) +\\ &+(\vec{\mathbf{U}}_0 + \vec{\mathbf{u}}_0)\times\frac{\vec{\mathbf{k}}}{\omega}\times\vec{\mathbf{E}}_0(\vec{\mathbf{R}})\cos(\omega\tau - \vec{\mathbf{k}}\cdot\vec{\mathbf{R}})\\ &-(\vec{\mathbf{U}}_0 + \vec{\mathbf{u}}_0)\times\frac{1}{\omega}\nabla\times\vec{\mathbf{E}}_0(\vec{\mathbf{R}})\sin(\omega\tau - \vec{\mathbf{k}}\cdot\vec{\mathbf{R}})]\end{aligned} \tag{6.47}$$

La partie lente de cette équation nous intéresse,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\vec{\mathbf{U}}_0(t) = \frac{q}{m}[&< (\vec{\rho}_1\cdot\nabla)\vec{\mathbf{E}}_0(\vec{\mathbf{R}})\cos(\omega\tau - \vec{\mathbf{k}}\cdot\vec{\mathbf{R}}) >\\ &+ < \vec{\mathbf{k}}\cdot\vec{\rho}_1\vec{\mathbf{E}}_0(\vec{\mathbf{R}})\sin(\omega\tau - \vec{\mathbf{k}}\cdot\vec{\mathbf{R}}) >\\ &+ < \vec{\mathbf{u}}_0\times\frac{\vec{\mathbf{k}}}{\omega}\times\vec{\mathbf{E}}_0(\vec{\mathbf{R}})\cos(\omega\tau - \vec{\mathbf{k}}\cdot\vec{\mathbf{R}}) >\\ &- < \vec{\mathbf{u}}_0\times\frac{1}{\omega}\nabla\times\vec{\mathbf{E}}_0(\vec{\mathbf{R}})\sin(\omega\tau - \vec{\mathbf{k}}\cdot\vec{\mathbf{R}}) >]\end{aligned} \tag{6.48}$$

Avec les expressions de $\vec{\mathbf{u}}_0$ et $\vec{\rho}_1$ trouvées ci-dessus, le calcul des moyennes est aisé.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\vec{\mathbf{U}}_0(t) \quad = \quad & \frac{q}{m\omega^2}[-(\vec{\mathbf{E}}_0(\vec{\mathbf{R}})\cdot\nabla)\vec{\mathbf{E}}_0(\vec{\mathbf{R}}) < \cos^2 >\\ &-(\vec{\mathbf{k}}\cdot\vec{\mathbf{E}}_0(\vec{\mathbf{R}}))\vec{\mathbf{E}}_0(\vec{\mathbf{R}}) < \sin\cos >\\ &+\vec{\mathbf{E}}_0(\vec{\mathbf{R}})\times\vec{\mathbf{k}}\times\vec{\mathbf{E}}_0(\vec{\mathbf{R}}) < \cos\sin >\\ &-\vec{\mathbf{E}}_0(\vec{\mathbf{R}})\times(\nabla\times\vec{\mathbf{E}}_0(\vec{\mathbf{R}})) < \sin^2 >]\end{aligned} \tag{6.49}$$

En explicitant les moyennes des fonctions trigonométriques (1/2 et 0), et la relation vectorielle

$$(\vec{\mathbf{E}}_0 \cdot \nabla)\vec{\mathbf{E}}_0 + \vec{\mathbf{E}}_0 \times (\nabla \times \vec{\mathbf{E}}_0) = \frac{1}{2}\nabla(\vec{\mathbf{E}}_0^2). \tag{6.50}$$

il reste quelque chose d'assez simple, qu'on appelle la force pondéromotrice.

$$\frac{d}{dt}\vec{\mathbf{U}}_0(t) = -\frac{q}{4m\omega^2}[\nabla\vec{\mathbf{E}}_0(\vec{\mathbf{R}})^2] \tag{6.51}$$

6.4 Particule dans un plasma magnétisé, approximation du centre guide

On considère le cas d'une particule dans un champ électromagnétique évoluant plus lentement que la fréquence cyclotronique ω_c de la particule. L'équation de la vitesse est

$$\frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt} = \frac{q}{m}[\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}, t) + \vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}}(\vec{\mathbf{r}}, t)]. \tag{6.52}$$

L'approximation asymptotique est intéressante si q/m est grand (cas des électrons par exemple). On pose $\epsilon = (Q/M)/(q/m)$, c'est à dire qu'on normalise q/m par rapport à une particule ayant beaucoup plus d'inertie (pour laquelle on ne pourrait faire de développement asymptotique). On veut aussi, quand on calcule des moyennes, $< \cos(\omega_c t + \phi) >= 0$ à l'échelle de temps induite par l'approximation précédente. On pose

$$\Omega = \omega_c \epsilon = \frac{QB}{M}. \tag{6.53}$$

On notera que Ω est définie localement, car l'amplitude du champ magnétique B dépend (lentement) du lieu et du temps. On réécrit l'équation du mouvement,

$$\frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt} = \frac{1}{\epsilon}\frac{Q}{M}[\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}, t) + \vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}}(\vec{\mathbf{r}}, t)]. \tag{6.54}$$

L'équation (6.33) nous rapelle que la composante du mouvement rapide à l'ordre 0 en vitesses (ordre 1 en position), provient d'un terme d'ordre -1 en force. Cela veut dire qu'on peut *a priori* considérer des champs électrique et magnétique d'ordre 0. En anticipant un peu sur la suite, il ressort que le champ électrique lent est d'ordre 1 dans sa composante parallèle, sans quoi la solution de l'équation rapide diverge, ce qui nous place hors du cadre de l'approximation asymptotique. On pose donc

$$\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}, t) = \vec{\mathbf{E}}_\perp(\vec{\mathbf{r}}, t) + \epsilon \vec{\mathbf{E}}_{\|1}(\vec{\mathbf{r}}, t) \tag{6.55}$$

Pour abréger, on notera parfois $\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{R}}, t)$ et $\vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{B}}(\vec{\mathbf{R}}, t)$. Comme la méthode multi-échelle se fonde sur un développement autour du point $\vec{\mathbf{R}}$, il faut entrer les relations suivantes :

$$\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}, t) = \vec{\mathbf{E}}_\perp + \epsilon[(\rho_1 \cdot \nabla)\vec{\mathbf{E}}_\perp + \vec{\mathbf{E}}_{\|1}] + ... \tag{6.56}$$

$$\vec{\mathbf{B}}(\vec{\mathbf{r}}, t) = \vec{\mathbf{B}} + \epsilon(\rho_1 \cdot \nabla)\vec{\mathbf{B}} + ... \tag{6.57}$$

où on a déjà pris en compte la nullité de ρ_0. Voici le développement de l'équation de la vitesse suivant ϵ (on se contente des termes d'ordre -1 et 0) :

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt} = {} & \frac{1}{\epsilon}\frac{Q}{M}[\vec{\mathbf{E}}_\perp + (\vec{\mathbf{U}}_0 + \vec{\mathbf{u}}_0) \times \vec{\mathbf{B}}] \\ & + \frac{Q}{M}[\vec{\mathbf{E}}_{\|1} + (\vec{\rho}_1 \cdot \nabla)\vec{\mathbf{E}}_\perp + (\vec{\mathbf{U}}_1 + \vec{\mathbf{u}}_1) \times \vec{\mathbf{B}} \\ & + (\vec{\mathbf{U}}_0 + \vec{\mathbf{u}}_0) \times [(\vec{\rho}_1 \cdot \nabla)\vec{\mathbf{B}}]]. \end{aligned} \tag{6.58}$$

A l'ordre le plus bas, l'équation de la vitesse nous est donnée par (6.33),

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\vec{\mathbf{u}}_0(t, \tau) = \frac{Q}{M}[\vec{\mathbf{E}}_\perp + (\vec{\mathbf{U}}_0 + \vec{\mathbf{u}}_0) \times \vec{\mathbf{B}}]. \tag{6.59}$$

La partie moyenne de cette équation est

$$0 = \frac{Q}{M}[\vec{\mathbf{E}}_\perp(\vec{\mathbf{R}}, t) + \vec{\mathbf{U}}_0 \times \vec{\mathbf{B}}(\vec{\mathbf{R}}, t)] \tag{6.60}$$

dont la solution est la dérive de champs croisés, bien connue, et la vitesse parallèle $\vec{\mathbf{U}}_{\|0}$, indéterminée à ce stade :

$$\vec{\mathbf{U}}_0 = \frac{\vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{B}}}{B^2} + \vec{\mathbf{U}}_{\|0}\vec{\mathbf{b}}. \tag{6.61}$$

La partie rapide est

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\vec{\mathbf{u}}_0(t, \tau) = \frac{Q}{M}[\vec{\mathbf{u}}_0 \times \vec{\mathbf{B}}(\vec{\mathbf{R}}, t)] \tag{6.62}$$

Notons que l'inclusion *a priori* possible d'un champ électrique parallèle variant lentement aboutirait ici dans la solution à un terme de la forme $u_0(t,\tau) = (Q/M)\, E_{\|0}\tau$ divergent, de moyenne non nulle, et pour ces deux raisons (liées) inacceptable. Donc une solution asymptotique développée dans le cadre présent n'est possible qu'en l'absence d'un champ électrique parallèle d'ordre négatif. On peut résoudre l'équation (**??**) du mouvement rapide.

L'équation (6.62) devient

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} u_{0x} - \Omega u_{0y} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial \tau} u_{0y} + \Omega u_{0x} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial \tau} u_{0z} &= 0 \end{aligned} \tag{6.63}$$

C'est l'équation d'un oscillateur dont la solution est :

$$\begin{aligned} u_{0x} &= +\rho_L \frac{\Omega}{\epsilon} \cos(\Omega\tau + \psi) && (6.65) \\ u_{0y} &= -\rho_L \frac{\Omega}{\epsilon} \sin(\Omega\tau + \psi) \\ u_{0z} &= 0. \end{aligned} \tag{6.64}$$

On note deux constantes d'intégration, notées ρ_L et ψ. La première est le rayon de Larmor de la particule. L'intégration de (6.32) est immédiate,

$$\begin{aligned} \rho_{1x} &= \frac{\rho_L}{\epsilon} \sin(\Omega\tau + \psi) \\ \rho_{1y} &= \frac{\rho_L}{\epsilon} \cos(\Omega\tau + \psi) \\ \rho_{1z} &= 0. \end{aligned} \tag{6.66}$$

On remarque que l'amplitude des termes liés au champ électrique de haute fréquence sont fixés par cette relation, sans aucun paramètre arbitraire. L'amplitude du mouvement gyrocinétique, au contraire, dépend d'une variable d'intégration arbitraire, qu'on relie au rayon de Larmor. Autrement dit, une particule peut avoir un rayon de Larmor quelconque. En effet, celui-ci dépend de la vitesse perpendiculaire de la particule, qui n'est pas contrainte autrement que par les conditions initiales du problème.

A l'ordre suivant, l'équation du mouvement lent (partie lente de l'équation 6.34) est

$$\frac{d}{dt}\vec{\mathbf{U}}_0(t,\tau) = \frac{Q}{M}[\vec{\mathbf{E}}_{\|1} + \vec{\mathbf{U}}_1 \times \vec{\mathbf{B}} + < \vec{\mathbf{u}}_0 \times (\vec{\rho}_1 \cdot \nabla)\vec{\mathbf{B}} >] \tag{6.67}$$

Il faut maintenant réinjecter les solutions rapides montrées ci-dessus dans l'équation 6.67. On calcule alors les moyennes. Voici le résultat :

$$\frac{d}{dt}\vec{\mathbf{U}}_0(t,\tau) \;=\; \frac{Q}{M}[\vec{\mathbf{E}}_{\|1} + \vec{\mathbf{U}}_1 \times \vec{\mathbf{B}}] - \frac{\mu}{m}\nabla\vec{\mathbf{B}}_z$$

où l'on a employé les égalités (tirées de 6.65) $(Q/M)(\rho_L^2\Omega/2\epsilon^2) = u_0^2/2B = \mu/m$. Ce résultat n'a pas encore une forme tout à fait générale, puisqu'il apparaît une dérivée de B_z, et que z est une direction particulière dans notre calcul. En fait, c'est la dérivé de $\vec{\mathbf{B}}$ selon sa propre direction. Il s'avère que c'est la dérivée du module B. On peut le vérifier rapidement, en développamnt la formule générale et en considérant, tout à la fin que localement, $B = B_z$:

$$dB = d\sqrt(B_x^2 + B_y^2 + B_z^2)^{1/2} = \frac{B_x dB_x + B_y dB_y + B_z dB_z}{B} = dB_z. \tag{6.68}$$

A ce stade, il est intéressant de se débarasser des termes Q/M, ϵ, et $E_{\|1}$ liés aux aspects "internes" du développement asymptotique. On peut notamment écrire $\vec{\mathbf{E}}_{\|} = \epsilon\vec{\mathbf{E}}_{\|1}$. Alors,

$$\frac{d}{dt}\vec{\mathbf{U}}_0(t,\tau) \;=\; \frac{q}{m}[\vec{\mathbf{E}}_{\|} + \epsilon\vec{\mathbf{U}}_1 \times \vec{\mathbf{B}}] - \frac{\mu}{m}\nabla\vec{\mathbf{B}}. \tag{6.69}$$

On en déduit l'équation d'évolution de la vitesse parallèle d'ordre 0 :

$$\frac{d}{dt}\vec{\mathbf{U}}_{\|0}(t,\tau) = \frac{q}{m}\vec{\mathbf{E}}_{\|} - \frac{\mu}{m}\nabla_{\|}\vec{\mathbf{B}}. \tag{6.70}$$

On connaît déjà la composante perpendiculaire de $\vec{\mathbf{U}}_0$, on peut à présent connaître celle de $\vec{\mathbf{U}}_1$. En explicitant U_0, (6.61), à l'ordre 1 :

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{U}}_{\perp} &= \vec{\mathbf{U}}_0 + \epsilon\vec{\mathbf{U}}_1 \qquad (6.71)\\ &= \frac{\vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{B}}}{B^2} + \frac{m\vec{\mathbf{b}}}{qB} \times [\frac{d}{dt}(\frac{\vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{B}}}{B^2}) + \frac{d}{dt}(U_{\|0}\vec{\mathbf{b}}) + \frac{\mu}{m}\nabla\vec{\mathbf{B}}].\end{aligned}$$

Les relations 6.70 et 6.71 sont les équations classiques de la théorie du centre guide. On peut également obtenir une équation portant sur l'évolution globale de la vitesse à l'ordre 1, sans séparation explicite des composantes parallèle et perpendiculaire. On constate d'abord que cette vitesse est $\vec{\mathbf{U}} = \vec{\mathbf{U}}_0 + \epsilon \vec{\mathbf{U}}_1$ et que l'équation d'évolution $d_t(\epsilon U_1) = \epsilon F_1 = O(\epsilon^2)$. Donc, on peut écrire $d_t U$ à l'ordre 1 sans tenir compte de $d_t(\epsilon U_1)$. En additionnant les équations d'évolution lentes aux ordres -1 et 0 (6.60 et 6.69),

$$\frac{d\vec{\mathbf{U}}}{dt} = \frac{q}{m}[\vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{U}} \times \vec{\mathbf{B}}] - \frac{\mu}{m}\nabla\vec{\mathbf{B}}. \tag{6.72}$$

On rappelle que cette équation porte sur la partie lente de la vitesse, et que les champs $\vec{\mathbf{E}}$ et $\vec{\mathbf{B}}$ sont définis à l'emplacement $\vec{\mathbf{R}}$ du centre-guide, et non à l'emplacement $\vec{\mathbf{r}}$ de la particule.

Chapitre 7

Mouvement des particules chargées

A partir de la section 7.3, ce chapitre traite, d'une manière plus élémentaire, mais moins élégante, la question du mouvement des centrees guides résolue au chapitre précédent.

7.1 Equation du mouvement d'une particule chargée

Le mouvement d'une particule chargée non relativiste dans un champ électromagnétique quelconque est décrit par l'équation de Lorentz

$$m\frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt} = \vec{\mathbf{F}} + e(\vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}}) \tag{7.1}$$

où $\vec{\mathbf{F}}$ représente les forces autres qu'électromagnétiques (gravitation, inertie...). L'eq́uation du mouvement de la particule ("restreintement") relativiste porte sur la quantité de mouvement $\vec{\mathbf{p}} = \gamma m\vec{\mathbf{v}}$ où $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1}$:

$$\frac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt} = \vec{\mathbf{F}} + e(\vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}}). \tag{7.2}$$

On étudiera par la suite essentiellement le mouvement de particules non relativistes. Les cas où l'on traitera le cas relativiste seront explicitement mentionnés.

7.2 Mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme

Dans le cas d'un champ magnétique uniforme et en l'abscence de champ électrique, 7.2 se simplifie

$$\frac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt} = e\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}}. \tag{7.3}$$

Ici, comme c'est simple, on peut traiter directement le cas relativiste. En multipliant 7.2 par $\vec{\mathbf{p}}$, on trouve que la variation d'énergie cinétique $p^2/2m$ est nulle. Alors p est constant et $d\vec{\mathbf{p}}/dt$ est orthogonal à $\vec{\mathbf{p}}$. De ce fait, γ est constant. Alors

$$\frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt} = \vec{\mathbf{v}} \times \vec{\omega}_c. \tag{7.4}$$

où ω_c est une constante, la gyrofréquence définie par

$$\vec{\omega}_c = \frac{e\vec{\mathbf{B}}}{\gamma m}. \tag{7.5}$$

En multipliant 7.4 par ω_c ou z on voit que $v_z = v_{\|}$ est constant. Dans le plan x, y,

$$\begin{aligned} \dot{x} - \omega_c y &= \text{cste} \\ \dot{y} + \omega_c x &= \text{cste} \end{aligned}$$

Les équations sur x ou y sont identiques : $m\ddot{x} + \omega_c^2 x = 0$. La solution est donc du type

$$x = \rho_L \cos(\omega_c t + \phi) \tag{7.6}$$
$$y = \rho_L \sin(\omega_c t + \phi) \tag{7.7}$$

décrivant un mouvement circulaire de pulsation ω_c et de rayon ρ_L dans le plan perpendiculaire à la direction du champ magnétique. Pour les vitesses,

$$v_x = -v_\perp \sin(\omega_c t + \phi) \tag{7.8}$$
$$v_y = v_\perp \cos(\omega_c t + \phi) \tag{7.9}$$

On désignera dorénavant par $\vec{\mathbf{w}}_0$ la vitesse (perpendiculaire à $\vec{\mathbf{B}}$) que l'on peut déduire de (7.6,7.7). On appelle ρ_L le rayon de Larmor (d'où la notation

FIG. 7.1 – Rotation d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme

adoptée), on peut le relier à la composante perpendiculaire de la quantité de mouvement de la particule et d'autres grandeurs de ce genre :

$$\rho_L = \frac{p_\perp}{eB} = \frac{v_\perp}{\omega_c} = \frac{w_0}{\omega_c}. \tag{7.10}$$

Il faut être conscient que dans le cas relativiste, cette formule contient de l'information sur la vitesse totale v qui est dans γ, lui même caché dans p ou ω_c.

Dans le cas non relativiste, les résultats ci-dessus demeurent, seulement on fait $\gamma = 1$.

L'angle α entre la vitesse et le champ magnétique est appelé l'*angle d'attaque*. On a $\vec{\mathbf{v}} = v_\parallel \vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{w}}_0$,

$$\tan\alpha = \frac{w_0}{v_\parallel},\ \cos\alpha = \frac{v_\parallel}{v},\ \sin\alpha = \frac{w_0}{v}, \tag{7.11}$$

où $\vec{\mathbf{w}}_0$ est la vitesse que l'on peut déduire de 7.6,7.7.

Le moment magnétique d'une particule en mouvement dans un champ magnétique uniforme est le rapport entre l'énergie cinétique associée à sa rotation et l'amplitude du champ magnétique

$$\mu = \frac{mv_\perp^2}{2B} = \frac{e\rho_L^2\omega_c}{2} = \frac{qv_\perp^2}{2\omega_c}. \tag{7.12}$$

7.3 Approximation centre guide

Le mouvement d'une particule dans un champ électromagnétique non uniforme ou variable dans le temps est nettement plus délicat à décrire.

Néanmoins, *on obtient de nombreux résultats dans le cas où les variations du champ magnétique sont assez faibles pour que l'on puisse séparer les échelles de temps* ω_c^{-1} *correspondant aux rotations de la particules montrées ci-dessus des autres effets que l'on supposera bien plus lents.* Comme la particule se balade dans le plan perpendiculaire à $\vec{\mathbf{B}}$ sur un cercle de rayon ρ_L, il faut que les champs varient peu sur cette distance :

$$\rho_L|(\nabla B)_\perp| = \frac{v_\perp}{\omega_c}|(\nabla B)_\perp| \ll B. \tag{7.13}$$

Cette inéquation est formellement équivalente à

$$mv_\perp|(\nabla B)_\perp| \ll eB^2. \tag{7.14}$$

Comme le temps caractéristique de ce mouvement est $T_c = 2\pi/\omega_c$, il faut que pendant ce temps la particule ne voie pas de grand changement du champ magnétique :

$$v_z(\frac{2\pi}{\omega_c})|(\nabla B)_\|| \ll B \tag{7.15}$$

$$(\frac{2\pi}{\omega_c})|\frac{\partial B}{\partial t}| \ll B \tag{7.16}$$

On supposera que le champ électrique $\mathbf{E}_\|$ parallèle au champ magnétique induit une accélération faible devant celle du champ magnétique (afin qu'on puisse la négliger en première approximation). Cette condition se traduit par

$$(e/m)E_\| \ll |\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}}| \sim \rho_L\omega_c^2. \tag{7.17}$$

Pour les calculs qui suivent sur le mouvement du centre guide, on orientera localement (en un point M_0 autour duquel tourne la particule) le repère x, y, z de telle sorte que l'axe z soit parallèle à la direction du champ magnétique $\vec{\mathbf{B}}$ [1]. Comme les variations du champ magnétique sont faibles (7.13,7.15,7.16), on peut décrire le champ magnétique à l'aide d'un développement limité du premier ordre au voisinage du point M_0 autour duquel tourne la particule,

[1]On pourrait même construire le repère de Frénêt, avec tangente, normale principale, et l'autre bi-normale bidule. Leurs dérivées font surgir la courbure et la torsion de la ligne de champ. Bien que cela ait l'air beau, je n'ai pas su en tirer un grand parti, pas assez grand du moins pour justifier l'introduction de ces concepts supplémentaires.

et au voisinnage du temps t_0. Pour alléger un peu, on convient que $t_0 = 0$ et $r - r_{M_0} = \vec{\mathbf{r}}$:

$$\vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{B}}_{(M_0)} + \frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t} t + \vec{\mathbf{r}} \cdot \nabla \vec{\mathbf{B}} \tag{7.18}$$

où le gradient du champ magnétique $\nabla \vec{\mathbf{B}}$ est le tenseur défini par

$$\nabla \vec{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} (B_x, B_y, B_z) = \begin{pmatrix} \partial_x B_x & \partial_x B_y & \partial_x B_z \\ \partial_y B_x & \partial_y B_y & \partial_y B_z \\ \partial_z B_x & \partial_z B_y & \partial_z B_z \end{pmatrix}. \tag{7.19}$$

Il serait tentant d'annuler les deux premières colonnes puisque $B = B_z$ en M_0 . Que nenni ! Ce n'est pas parce que des fonctions s'annulent en un point que leurs dérivées s'annulent aussi. En particulier, l'existence possible de $\partial_z B_z$ combinée avec la relation $\nabla \cdot \vec{\mathbf{B}} = 0$ implique des termes comme $\partial_x B_x$ ou $\partial_y B_y$ donc l'existence de composantes B_x ou B_y dès que l'on s'éloigne du point M_0. On pourra développer le champ électrique de manière analogue :

$$\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{E}}_{(M_0)} + \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t} t + \vec{\mathbf{r}} \cdot \nabla \vec{\mathbf{E}}. \tag{7.20}$$

Par souci d'alléger les notations, on omettra les indices (M_0), sauf de temps en temps pour éviter une confusion possible. Pour bien comprendre, il suffit de se dire dans ce qui suit que toutes les grandeurs de champs qui apparaissent sont définies au point M_0 et au temps $t_0 = 0$ et que ce sont donc des grandeurs constantes.

7.4 Le mouvement du centre guide

En général, les effets d'un champ électrique, d'une force, des gradients et des variations temporelles du champ magnétique sont calculés séparément. C'est pédagogique car chaque effet est détaillé séparément, par contre, il n'y a pas moyen de savoir si ces effets distincts n'interfèrent par pour donner de nouvelles dérives lorsqu'ils sont mis ensemble. En plus ça fait plein de petits calculs, et je préfère un seul calcul à peine plus long.

On va faire un calcul perturbatif du mouvement d'une particule en tenant compte de tout ce qui peut varier. L'ordre du développement s'entend par rapport aux variations de $\vec{\mathbf{B}}$ et aux relations 7.13–7.17 qui permettent d'établir un classement des ordres de grandeur. On fera un développement à l'ordre zéro et un. On négligera (avec respect) les termes d'ordres supérieurs. On écrit donc que la vitesse est la somme d'une vitesse $\vec{\mathbf{v}}_0$ (pouvant varier sur des temps caractéristiques ω_c^{-1}) et d'une vitesse $\vec{\mathbf{v}}_1$, plus faible que $v_{\perp,0}$ et qui correspond à des phénomènes dont les temps caractéristiques sont longs par rapport à ω_c^{-1}. On calculera deux équations portant sur $\vec{\mathbf{v}}_0$ et $\vec{\mathbf{v}}_1$ et on eurêquera leur solution en essayant de tricher le moins possible.

7.4.1 Approximation à l'ordre zéro

Tout d'abord, ne confondons pas ordre zéro et désordre. L'équation du mouvement à l'ordre zéro est

$$m\frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt} = \vec{\mathbf{F}}_{(M_0)\perp} + e(\vec{\mathbf{E}}_{(M_0)\perp} + \vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}}_{(M_0)}). \tag{7.21}$$

Le cas où les forces F et E sont nulles a été résolu dans le paragraphe 7.2 : on trouve $v_\parallel$ =cste, et les relations 7.6 et 7.7. Dans le cas général, l'équation du mouvement 7.21 peut se simplifier si l'on change de repère. On se place dans un repère R' de vitesse $\vec{\mathbf{u}}_0$ par rapport au repère initial. On suppose que $\vec{\mathbf{u}}_0$ est à peu près constant (par rapport au temps), ce qui est compatible avec les ordres de grandeurs considérés [2]. D'après les équations (non relativistes) de changement des forces et des champs dans un tel changement de repère $\vec{\mathbf{v}}'_0 = \vec{\mathbf{v}}_0 - \vec{\mathbf{u}}_0$, $\vec{\mathbf{E}}' = \vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{u}}_0 \times \vec{\mathbf{B}}$, $\vec{\mathbf{B}}' = \vec{\mathbf{B}}$ et $\vec{\mathbf{F}}' = \vec{\mathbf{F}}$. Dans le nouveau repère, 7.21 s'écrit

$$\begin{aligned} m\frac{d\vec{\mathbf{v}}'_0}{dt} &= m\frac{d\vec{\mathbf{v}}_0}{dt} \\ &= \vec{\mathbf{F}}' + e(\vec{\mathbf{E}}' + \vec{\mathbf{v}}'_0 \times \vec{\mathbf{B}}') \\ &= \vec{\mathbf{F}} + e\vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{u}}_0 \times \vec{\mathbf{B}} + e\vec{\mathbf{v}}'_0 \times \vec{\mathbf{B}}. \end{aligned} \tag{7.22}$$

En choisissant bien $\vec{\mathbf{u}}_0$, on peut annuler les termes dépendant du champ électrique $\vec{\mathbf{E}}_\perp$ et du champ de forces $\vec{\mathbf{F}}_\perp$ perpendiculaires, en effet, avec

$$\vec{\mathbf{u}}_0 = (\vec{\mathbf{F}}/e + \vec{\mathbf{E}}) \times \frac{\vec{\mathbf{B}}}{B^2} = (\vec{\mathbf{F}}_\perp/e + \vec{\mathbf{E}}_\perp) \times \frac{\vec{\mathbf{B}}}{B^2}, \tag{7.23}$$

l'équation 7.22 devient

$$m\frac{d\vec{\mathbf{v}}'_0}{dt} = \vec{\mathbf{v}}'_0 \times \vec{\mathbf{B}}. \tag{7.24}$$

[2] Les variations de $\mathbf{u}_0$ seront nécessairement prises en compte à l'ordre un.

FIG. 7.2 – Dérive de champs croisés

On en déduit que l'effet d'une force, ou d'un champ électrique est d'ajouter à la solution du paragraphe 7.2 une dérive perpendiculaire dont la vitesse est donnée par la relation 7.23.

7.4.2 Approximation à l'ordre un

On résoudra l'équation sur $\vec{\mathbf{v}}_1$ après en avoir fait une moyenne sur une durée grande devant T_c. A l'ordre zéro, seulement $\vec{\mathbf{B}}$ et $\vec{\mathbf{E}}_\perp$ apparaissaient dans l'équation du mouvement. Dans l'équation à l'ordre 1, on fera apparaître $\vec{\mathbf{B}}$, $\vec{\mathbf{E}}$ (dont $\vec{\mathbf{E}}_\parallel$), et leurs dérivées ($\partial_t$ et gradient).

On reprend l'équation du mouvement 7.1 en tenant compte de développements limités sur les variations des champs magnétique et électrique 7.18, 7.19 et 7.20. Comme on en fera une moyenne temporelle, il faut calculer l'accélération pour des temps voisins du temps t_0. Pour alléger les notations, on pose $t_0 = 0$. On définira la moyenne d'une grandeur a comme $(1/2T)\int_{-T}^{+T} a dt$. Comme la variation temporelle de a a été linéarisée (7.18, 7.20), la valeur moyenne de a est $a(t = 0)$. L'équation de Lorentz 7.1 s'écrit, avec 7.19 et 7.20

$$m\frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt} = \vec{\mathbf{F}} + e\vec{\mathbf{E}} + e\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}} + e\vec{\mathbf{v}} \times \frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t} t + e\vec{\mathbf{v}} \times (d\vec{\mathbf{r}} \cdot \nabla \vec{\mathbf{B}}). \qquad (7.25)$$

Elle se sépare en 7.21 et l'équation sur $\vec{\mathbf{v}}_1$ dont on prendra ensuite la valeur moyenne :

$$
\begin{aligned}
m\frac{d\vec{\mathbf{v}}_1}{dt} &= m\Sigma_i(\frac{dv_{1i}}{dt}\vec{\mathbf{e}}_i + \frac{d\vec{\mathbf{e}}_i}{dt}v_{1i}) \qquad (7.26)\\
&= -m\frac{d\vec{\mathbf{u}}_0}{dt} + \vec{\mathbf{F}}_\parallel + e\vec{\mathbf{E}}_\parallel + e\frac{\partial\vec{\mathbf{E}}}{\partial t}t + \mathbf{r}_0\cdot\nabla\vec{\mathbf{E}}\\
&\quad +e\vec{\mathbf{v}}_1\times\vec{\mathbf{B}}_{(M_0)} + e\vec{\mathbf{v}}_0\times\frac{\partial\vec{\mathbf{B}}}{\partial t}t + e\vec{\mathbf{v}}_0\times(\vec{\mathbf{r}}_0\cdot\nabla\vec{\mathbf{B}}).
\end{aligned}
$$

Commentaires sur les termes d'accélération La première partie de l'égalité montre qu'il ne suffit pas de dériver les coordonnées pour avoir la dérivée de la vitesse. En effet, on a vu que le repère est construit de manière à ce que le vecteur $\vec{\mathbf{e}}_z = \vec{\mathbf{b}}$ soit parallèle à la direction locale des lignes de champ. Lorsque la particule avance, ce référentiel bouge et il faut tenir compte de la variation des vecteurs qui définissent ce réferentiel. Les forces qui découlent de cette prise en compte sont simplement les forces d'inertie $-m\Sigma_i v_{1i}(d\vec{\mathbf{e}}_i/dt)$ dues à un effet de rotation du référentiel.

On a vu qu'à l'ordre zéro, le vecteur $\vec{\mathbf{u}}_0$ peut être considéré comme constant. Ses variations sont d'ordre 1, d'où leur prise en compte dans le terme $-md\vec{\mathbf{u}}_0/dt$ de l'équation 7.26. Le vecteur $\vec{\mathbf{u}}_0$ étant issu d'un changement de repère (galiléen à l'ordre zéro, non gallilréen à l'ordre un), c'est une force d'inertie due à une accélération du référentiel (en module ou en rotation).

Les termes $\vec{\mathbf{F}}_\parallel$ et $e\vec{\mathbf{E}}_\parallel$ sont des forces de direction parallèle au champ magnétique qu'on avait négligé à l'ordre zéro.

De même, les variations temporelles et spatiales des champs apparaissent à l'ordre un. Ce termes doivent être pris en compte pour l'évaluation de la force moyenne (pour une force instantanée, en choisissant bien M_0 à l'emplacement instantané de la particule, ils sont nuls). Sachant que les dérivées des champs sont d'ordre 1, elles doivent être multipliées par des termes d'ordre 0 (comme $\vec{\mathbf{v}}_0$) sans quoi, on obtient des termes d'ordre supérieur à un, et donc négligés dans cette approximation.

Valeur moyenne de l'accélération Il reste maintenant à calculer la valeur moyenne de cette force. Pour cela, on projettera séparément chaque terme de l'équation 7.26 sur les trois axes du repère et l'on calculera leur valeur moyenne. Les termes $\vec{\mathbf{v}}_0, \vec{\mathbf{u}}_0$ ont été calculés précédement : posons $c = \cos(\omega_c t + \phi)$, $s = \sin(\omega_c t + \phi)$, alors $\vec{\mathbf{r}}_0 = (\rho_L c + u_{0x}t, \rho_L s + u_{0x}t, v_z t)$ et

$\vec{\mathbf{v}}_0 = (-\rho_L\omega_c s + u_{0x}, \rho_L\omega_c c + u_{0x}, v_z$. On peut noter cela comme $\vec{\mathbf{v}}_0 = \vec{\mathbf{u}}_0 + \vec{\mathbf{w}}_0$ où $\vec{\mathbf{w}}_0$ décrit les rotations de la particule à la fréquence ω_c.

Forces dues à la rotation du repère : Comme $\vec{\mathbf{e}}_z = \vec{\mathbf{b}}$, la différentielle d'abscisse curviligne $ds = dz$. Donc, $ds/dt = dz/dt = v_z$. En développant la dérivée totale

$$-m\Sigma_i v_{1i}(\frac{d\vec{\mathbf{e}}_i}{dt}) = -m\{v_x v_z \frac{\vec{\mathbf{e}}_x}{dz} + v_y v_z \frac{\vec{\mathbf{e}}_y}{dz} + v_z^2 \frac{\vec{\mathbf{e}}_z}{dz} + v_x \frac{\partial \vec{\mathbf{e}}_x}{\partial t} + v_y \frac{\partial \vec{\mathbf{e}}_y}{\partial t} + v_z \frac{\partial \vec{\mathbf{e}}_z}{\partial t}\} \tag{7.27}$$

Les dérivées sont constantes, le produit $v_x v_y$ varie comme cs qui est de moyenne nulle. Donc la valeur moyenne de $v_x v_z \frac{\vec{\mathbf{e}}_x}{dz}$ est nulle. De même, la valeur moyenne de $v_y v_z \frac{\vec{\mathbf{e}}_y}{dz}$ est nulle. Les vitesses v_x et v_z (qui varient comme s et c) ont une valeur moyenne nulle. En moyenne,

$$\langle -m\Sigma_i v_{1i}(d\vec{\mathbf{e}}_i/dt)\rangle = -m\{+\langle v_z^2\rangle \frac{d\vec{\mathbf{b}}}{dz} + \langle v_z\rangle \frac{\partial \vec{\mathbf{e}}_z}{\partial t}\}. \tag{7.28}$$

La force liée à $\partial_t \vec{\mathbf{e}}_z$ varie comme une dérivée de B divisée par B, elle est d'ordre supérieur à 2 et on la néglige. Un petit calcul simple montre que $\langle v_z\rangle = v_z$ et $\langle v_z^2\rangle = v_z^2/2$ (moyenne d'un cosinus carré). D'autre part

$$\frac{\partial \vec{\mathbf{z}}}{\partial z} = \frac{\partial(\vec{\mathbf{B}}/B)}{\partial z} = \frac{1}{B}\begin{pmatrix} \partial_z B_x \\ \partial_z B_y \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{B}\frac{\partial \vec{\mathbf{B}}_\perp}{\partial z} \tag{7.29}$$

La force moyenne d'inertie de rotation du reprère est donc

$$-\frac{mv_z^2}{B}\partial_z \vec{\mathbf{B}}_\perp. \tag{7.30}$$

Il est préférable d'écrire cette force d'une manière qui ne fait pas intervenir la dérivée par rapport à z, car z a des propriétés particulières dues à notre choix de repère. Remarquant que

$$\nabla\frac{\vec{\mathbf{B}}}{B} = \frac{\nabla\vec{\mathbf{B}}}{B} - \frac{\vec{\mathbf{B}}\nabla B}{B^2} = \frac{\nabla\vec{\mathbf{B}}_\perp}{B} \tag{7.31}$$

car $B = B_z$, et que

$$\partial_z \frac{\vec{\mathbf{B}}}{B} = \vec{\mathbf{b}}\cdot\nabla\frac{\vec{\mathbf{B}}}{B} = \vec{\mathbf{b}}\cdot\nabla\vec{\mathbf{b}}, \tag{7.32}$$

la force 7.30 s'écrit donc de manière plus “canonique”

$$-mv_\parallel^2 \vec{\mathbf{b}}\cdot\nabla\vec{\mathbf{b}}. \tag{7.33}$$

Forces dues à la variation de $\vec{\mathbf{u}}_0$: D'après 7.23 ,

$$\frac{d\vec{\mathbf{u}}_0}{dt} = \frac{d\vec{\mathbf{E}}_\perp}{dt} \times \frac{\vec{\mathbf{B}}}{B^2} + \vec{\mathbf{E}}_\perp \times \frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{\mathbf{B}}}{B^2}\right); \tag{7.34}$$

(on néglige $\vec{\mathbf{F}}$ par économie ; si $\vec{\mathbf{F}}$ varie, on le traitera comme $e\vec{\mathbf{E}}$). Le second terme fait apparaitre des derivées de $\vec{\mathbf{B}}$ divisées par B^2, ces termes sont d'ordre supérieur à 1, donc négligeables ici. Le premier terme est égal à sa valeur moyenne. Donc

$$\langle -m\frac{d\vec{\mathbf{u}}_0}{dt}\rangle = -m\frac{d\vec{\mathbf{E}}_\perp}{dt} \times \frac{\vec{\mathbf{B}}}{B^2}. \tag{7.35}$$

Forces dues au gradient de B : Le terme en gradient se décompose en

$$\vec{\mathbf{u}}_0 \times (\vec{\mathbf{r}}_0 \cdot \nabla\vec{\mathbf{B}}) + \vec{\mathbf{w}}_0 \times (\vec{\mathbf{r}}_0 \cdot \nabla\vec{\mathbf{B}}) \tag{7.36}$$

Comme $\vec{\mathbf{u}}_0$ est un terme constant (ses variations ont été considérées au point précédent) on vérifie que tous les produits qui apparaissent dans le premier terme ont une moyenne nulle. Dans le second terme, il y a des facteurs non nuls en moyenne, et on en détailler un peu le calcul. En explicitant $\nabla\vec{\mathbf{B}}$ et la solution à l'ordre zéro,

$$e\begin{pmatrix} -\rho_L\omega_c s \\ +\rho_L\omega_c c \\ v_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \rho_L c & \rho_L s & v_z t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \partial_x B_x & \partial_x B_y & \partial_x B_z \\ \partial_y B_x & \partial_y B_y & \partial_y B_z \\ \partial_z B_x & \partial_z B_y & \partial_z B_z \end{pmatrix} \tag{7.37}$$

en développant, ça prend des airs monstrueux mais c'est bébête.

$$e\begin{pmatrix} +[\rho_L^2\omega_c c^2\partial_x B_z] + \rho_L^2\omega_c cs\partial_y B_z - \rho_L v_z\omega_c(ct\partial_z B_z - c\partial_x B_y - s\partial_y B_y) - v_z^2 t\partial_z B_y \\ +\rho_L^2\omega_c cs\partial_x B_z + [\rho_L^2\omega_c s^2\partial_y B_z] + \rho_L v_z\omega_c(st\partial_z B_z - c\partial_x B_x - s\partial_y B_x) + v_z^2 t\partial_z B_x \\ -\rho_L^2\omega_c cs\partial_x B_y - [\rho_L^2\omega_c(\partial_y B_y + \partial_x B_x)] - \rho_L v_z t\omega_c(s\partial_z B_y + c\partial_z B_x) - \rho_L^2\omega_c cs\partial_y B_x \end{pmatrix} \tag{7.38}$$

Seuls les termes de 7.38 marqués entre crochets ont une moyenne non nulle. En valeur moyenne, il reste

$$\frac{e\rho_L^2\omega_c}{2}\begin{pmatrix} \partial_x B_z \\ \partial_y B_z \\ -\partial_y B_y - \partial_x B_x \end{pmatrix} = \frac{e\rho_L^2\omega_c}{2}\begin{pmatrix} \partial_x B_z \\ \partial_y B_z \\ \partial_z B_z \end{pmatrix} = \frac{e\rho_L^2\omega_c}{2}\nabla B \tag{7.39}$$

FIG. 7.3 – Dérive de gradient

La transformation de la troisième composante vient de $\nabla\cdot\vec{\mathbf{B}} = 0$ et la dernière expression vient de ce que B_z est égal à la norme B de $\vec{\mathbf{B}}$. Le terme en $\partial_t\vec{\mathbf{B}}$ de 7.26 se développe de façon analogue

$$e\,t\begin{pmatrix} -\rho_L\omega_c s \\ +\rho_L\omega_c c \\ v_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \partial_t B_x \\ \partial_t B_y \\ \partial_t B_z \end{pmatrix} = e\,t\begin{pmatrix} \rho_L\omega_c c\partial_t B_z - v_z\partial_t B_y \\ \rho_L\omega_c s\partial_t B_z + v_z\partial_t B_x \\ -\rho_L\omega_(cs\partial_t B_y + c\partial_t B_x). \end{pmatrix} \quad (7.40)$$

La valeur moyenne de cette force s'annule totalement.

Autres termes de forces ... On montre de même que les termes $et\partial_t\vec{\mathbf{E}}$ et $e\vec{\mathbf{r}}\cdot\nabla\vec{\mathbf{E}}$ ont une moyenne nulle.

Vitesses de dérive déduites des forces moyennes Pour récapituler, 7.26 s'écrit, une fois les forces moyennées sur une durée supérieure à la giro-période :

$$m\langle\frac{d\vec{\mathbf{v}}_1}{dt}\rangle = \vec{\mathbf{F}}_\parallel + e\vec{\mathbf{E}}_\parallel + \frac{e\rho_L^2\omega_c}{2}\nabla B - mv_\parallel^2\vec{\mathbf{b}}\cdot\nabla\vec{\mathbf{b}} - m\frac{d\vec{\mathbf{E}}}{dt}\times\frac{\vec{\mathbf{B}}}{B^2} + e\vec{\mathbf{v}}_1\times\vec{\mathbf{B}}_{(M_0)} \quad (7.41)$$

Tout comme on l'a fait pour l'approximation d'ordre zéro, on va simplifier cette équation en faisant un changement de repère. On se place dans un repère R' de vitesse $\vec{\mathbf{u}}_1$ par rapport au repère initial. D'après les équations de changement des forces et des champs dans un tel changement de repère

$\vec{\mathbf{v}}_1' = \vec{\mathbf{v}}_1 - \vec{\mathbf{u}}_1$, $\vec{\mathbf{E}}' = \vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{u}}_1 \times \vec{\mathbf{B}}$, $\vec{\mathbf{B}}' = \vec{\mathbf{B}}$ et $\vec{\mathbf{F}}' = \vec{\mathbf{F}}$. Dans le nouveau repère, 7.1 s'écrit

$$m\frac{d\vec{\mathbf{v}}_1{}'}{dt} = \vec{\mathbf{F}}_\parallel + e\vec{\mathbf{E}}_\parallel + \frac{e\rho_L^2\omega_c}{2}\nabla B - mv_\parallel^2\vec{\mathbf{b}}\cdot\nabla\vec{\mathbf{b}} - m\frac{d\vec{\mathbf{E}}}{dt}\times\frac{\vec{\mathbf{B}}}{B^2} + e\vec{\mathbf{v}}_1'\times\vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{u}}_1\times\vec{\mathbf{B}} \tag{7.42}$$

En choisissant bien $\vec{\mathbf{u}}_1$, on peut annuler les termes dépendant des champ de forces perpendiculaires ; avec

$$\vec{\mathbf{u}}_1 = (\frac{\rho_L^2\omega_c}{2}\nabla B - \frac{m}{e}v_\parallel^2\vec{\mathbf{b}}\cdot\nabla\vec{\mathbf{b}} - \frac{m}{e}\frac{d\vec{\mathbf{E}}}{dt}\times\frac{\vec{\mathbf{B}}}{B^2})\times\frac{\vec{\mathbf{B}}}{B^2} \tag{7.43}$$

l'équation 7.41 devient

$$m\frac{d\vec{\mathbf{v}}_1{}'}{dt} = \vec{\mathbf{F}}_\parallel + e\vec{\mathbf{E}}_\parallel + \frac{e\rho_L^2\omega_c}{2}\nabla_\parallel B. + e\vec{\mathbf{v}}'\times\vec{\mathbf{B}}. \tag{7.44}$$

On remarque qu'à l'ordre 1, $\vec{\mathbf{u}}_1$ est constant (par rapport au temps). L'équation 7.44 se sépare en deux parties, une parallèle au champ magnétique, et une perpendiculaire

$$m\frac{d\vec{\mathbf{v}}_{\parallel,1}{}'}{dt} = m\frac{d\vec{\mathbf{v}}_{\parallel,1}}{dt} \tag{7.45}$$

$$= \vec{\mathbf{F}}_\parallel + e\vec{\mathbf{E}}_\parallel + \frac{e\rho_L^2\omega_c}{2}\nabla_\parallel B \tag{7.46}$$

$$m\frac{d\vec{\mathbf{v}}_{\perp,1}{}'}{dt} = e\vec{\mathbf{v}}'_{\perp,1}\times\vec{\mathbf{B}} \tag{7.47}$$

On en déduit que l'effet d'un gradient de champ magnétique, d'une variation temporelle du champ électrique et d'une courbure des lignes de champ est d'introduire une dérive perpendiculaire du mouvement des centres guides, dont la vitesse est donnée par la relation 7.43. On a, pour des échelles de temps grandes devant T_c la vitesse est $\vec{\mathbf{v}}_{CG} = \vec{\mathbf{u}}_0 + \vec{\mathbf{u}}_1 + \vec{\mathbf{v}}_{\parallel,1}$, et on peut définir le vecteur $\vec{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{u}}_0 + \vec{\mathbf{u}}_1$ qui est la composante de $\vec{\mathbf{v}}_{CG}$ perpendiculaire à $\vec{\mathbf{B}}$. La vitesse parallèle $\vec{\mathbf{v}}_{\parallel,1}$, est donnée par la relation 7.44. On remarque que dans l'hypothèse où les champs varient peu en fonction du temps, l'hypothèse $\vec{\mathbf{u}}$ à peu près constant est vérifiée *a posteriori*. Plus précisément : $\vec{\mathbf{u}}_1$ ne contient que des termes d'ordre 1. Dériver $\vec{\mathbf{u}}_1$ ferait donc apparaitre des termes d'ordre 2 dont on ne tient pas compte à ce niveau d'approximation. Par conséquent, on rayonne de joie à l'idée qu'on a résolu le mouvement de la particule à ce niveau d'approximation. On célèbrera cette réussite en inventant un nouveau mot : on appelera *centre guide* le bidule associé à une particule chargée qui se déplace avec la vitesse $\vec{\mathbf{v}}_{CG}$. On peut dire que le centre guide est le centre autour duquel tourne la particule avec la vitesse $\vec{\mathbf{w}}_0$, la vitesse totale de la particule a donc une composante de haute fréquence ω_c donnée par $\vec{\mathbf{w}}_0$ et une composante plus faible variant lentement donnée par $\vec{\mathbf{v}}_{CG}$: $\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{w}}_0 + \vec{\mathbf{v}}_{CG}$.

Récapitulation sur le mouvement du centre guide Le mouvement du centre guide est régi par une équation qui décrit la composante parallèle de son accélération et par une équation qui donne explicitement les composantes perpendiculaires de sa vitesse. L'équation sur l'accélération parallèle (7.45) ne comprend que des termes d'ordre 1 :

$$m\frac{d\vec{\mathbf{v}}_{\parallel,1}}{dt} = \vec{\mathbf{F}}_{\parallel} + e\vec{\mathbf{E}}_{\parallel} + \mu\nabla_{\parallel}B, \tag{7.48}$$

où μ est le moment magnétique de la particule qui est le rapport entre l'énergie cinétique associée à sa rotation d'ordre 0 et l'amplitude du champ magnétique. La vitesse perpendiculaire contient un terme d'ordre 0 et des termes d'ordre 1 :

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{u}}_1 &= \vec{\mathbf{E}} \times \frac{\vec{\mathbf{B}}}{B^2} + \frac{\mu}{e}\nabla B \times \frac{\vec{\mathbf{B}}}{B^2} - \frac{m}{e}v_{\parallel}^2\vec{\mathbf{b}} \cdot \nabla\vec{\mathbf{b}} \times \frac{\vec{\mathbf{B}}}{B^2} - \frac{m}{e}\frac{d\vec{\mathbf{E}}}{dt} \times \frac{\vec{\mathbf{B}}}{B^2} \times \frac{\vec{\mathbf{B}}}{B^2} \qquad (7.49)\\ &= \vec{\mathbf{E}} \times \frac{\vec{\mathbf{B}}}{B^2} + \frac{\mu}{m\omega_c}\nabla B \times \vec{\mathbf{b}} - \frac{1}{\omega_c}v_{\parallel}^2\vec{\mathbf{b}} \cdot \nabla\vec{\mathbf{b}} \times \vec{\mathbf{b}} + \frac{1}{\omega_c B}\frac{d\vec{\mathbf{E}}_{\perp}}{dt}\end{aligned}$$

La seconde expression de la vitesse de dérive fait intervenir la définition de μ, le développement du double produit vectoriel (pour le terme dù à la variation de $\vec{\mathbf{E}}$), et a l'usage, autant que possible de la gyrofréquence 7.5. On obtient quatre termes de dérive qui s'appellent respectivement la *dérive de champs croisés*, la *dérive de gradient*, la *dérive de courbure* et la *dérive de polarisation.*

Commentaires sur les vitesses de dérive La dérive de champs croisés ne dépend pas du signe de la charge ni de la masse : toute particule chargée libre dans un champ électromagnétique aura la même dérive de champ croisé. Cette dérive n'engendre donc pas de courant dans un plasma. Réciproquement, on verra avec les équation décrivant la dynamique du plasma qu'une vitesse globale (et constante) $\vec{\mathbf{v}}$ d'un plasma (un vent ou un mouvement de convection, un courant neutre, un souffle, une brise...) engendre un champ électrique de convection tel que $\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{B}}/B^2$.

La dérive de gradient proportionnelle à ω_c^{-1} dépend donc de la charge des particules, c'est le genre de dérive apte à créer un courant électrique. De même pour la dérive de courbure et la dérive de polarisation.

La masse n'a pas d'effet sur la dérive de gradient. Electrons et ions subirons donc la même dérive, mais en sens contraires.

Des ions et des électrons de même énergie cinétique parallèle $mv_\|^2/2$ subirons la même dérive de courbure mais dans des sens opposés. Si leurs vitesses parallèles sont égales, alors la dérive des ions sera beaucoup plus forte.

Dans tous les cas de figure, la dérive de polarisation est beaucoup plus forte pour les ions que pour les électrons, dans le rapport de leurs masses.

Chapitre 8

Passage des équations cinétiques aux équations fluides

8.1 Introduction

Dans les plasmas magnétosphériques et du vent solaire, le rôle joué par les collisions binaires entre particules est négligeable (plasmas non collisionnels). Il en résulte que ces plasmas ne relaxent pas spontanément vers un état d'équilibre thermodynamique, même à petite échelle. Dans le cas des fluides ordinaires, on peut supposer que dans des élements de volume assez petits, l'équilibre thermodynamique est atteint. Les équations fluides classiques relient alors entre elles les variations de ces grandeurs thermodynamiques (pression, temperature, vitesse moyenne) en fonction du temps et de la position. Pour les plasmas non collisionels, il n'existe pas d'échelle, même petite pour laquelle on peut supposer l'existence d'un équilibre thermodynamique. Il faut alors définir la dynamique des plasmas à l'aide d'une équation de type cinétique (l'équation de Vlasov) qui décrit l'évolution de la fonction de distribution des particules en fonction du temps, de la position *et de la vitesse*. Cette équation est juste, mais très compliquée, puisqu'elle opère dans un espace des phases à six dimensions (au lieu d'un espace à trois dimensions pour les équations de type fluide). Pour réduire la dimensionalité du problème, on peut calculer des relations entre les moments de la fonction de distribution, à partir de l'équation cinétique. Ces moments coincident avec les grandeurs thermodynamiques classiques (densité, pression, vitesse moyenne, température, flux de chaleur etc...) et ces équations correspondent à des équations de type fluide. Malheureusement, chaque équation portant sur un moment fait appel à un nouveau moment d'ordre plus élevé. Par exemple, l'équation portant sur la densité fait intervenir la pression. L'équation sur la pression fait intervenir le flux de chaleur et ainsi de suite. Pour s'en tenir à un nombre fini d'équations de type fluide, il faut donc faire une hypothèse portant sur le moment d'ordre le plus élevé, et cette hypothèse contient forcément une part d'arbitraire. Il en résulte qu'aucun système d'équations de type fluide n'est utilisable en toute géneralité. Les contraintes portant sur la validité d'un système d'équations de type fluide se traduit bien souvent en termes de fréquences limites et de dimensions caractéristiques du problème. Généralement, plus les systèmes d'équations de type fluide employés sont simples, plus ils sont restreints à l'étude de phénomènes de basse fréquence et de grande dimension. Pour résoudre un problème de physique des plasmas, on a donc le choix entre rśoudre une équation cinétique exacte et 'lourde', ou des équations de type fluide, qui contrairement au cas des fluides ordinaires, résultent d'une approximation spécifique au problème envisagé.

8.2 Simulation numérique

Ce choix se pose à tout théoricien de la physique des plasma, ainsi qu'à tous ceux qui en font la simulation numérique. Le système d'équations de type fluide le plus simple décrivant un plasma est l'ensemble des équations de la MHD, pour lequel de nombreux codes sont actuellement opérationels. Il sont performants lorsque les phénomènes étudiés sont de grande dimensions (quelques 1000km dans la magnétosphère) et de basse fréquence (de l'ordre du Hertz). A l'autre extrémité se situent les codes de type Vlasov, et les codes de type particulaires, qui résolvent l'équation cinétique complète. Pour faire converger ces codes vers des solutions réalistes, il est indispensable de pouvoir décrire les phénomènes aux plus petites dimensions (λ_D) et de plus haute fréquence possible (ω_{pe}, ω_{ce} ou bien la fréquence des ondes lumineuses). Cela les rend inadaptés à l'étude des phénomènes de grandes dimensions (plus que quelques kilomètres) se développant sur des durées de l'ordre d'une fraction de seconde. Or bien des phénomènes dans les plasmas non collisionels englobent de vastes systèmes qui au cours de leur évolution déclenchent une cascade de phénomènes de petites dimensions dont les conséquences s'avérent capitales dans l'évolution globale du système. Afin de pouvoir simuler de tels phénomènes, de nombreux travaux ont été entrepris pour modéliser les plasmas, soit à l'aide d'équations de type fluide (codes MHD Hall, multi-fluides), soit des équations cinétiques simplifiées ou incomplètes, soit un mélange d'équations de types fluide et cinétique (codes hybrides).

8.3 Les grandeurs macroscopiques

Les grandeurs macroscopiques, sont définies à partir de la fonction de distribution de la manière montrée dans la table (8.3)

8.3.1 Quelques relations entre les grandeurs d'ordre deux

On peut comparer $\vec{\vec{\mathbf{P}}}$ et $\vec{\vec{\mathbf{T}}}$,

$$\vec{\vec{\mathbf{P}}}_s = m_s \int (\vec{\mathbf{w}} - \vec{\mathbf{v}}_s)(\vec{\mathbf{w}} - \vec{\mathbf{v}}_s) f_s d\vec{\mathbf{w}} = m_s \int \vec{\mathbf{w}}\vec{\mathbf{w}} + m\vec{\mathbf{v}}_s\vec{\mathbf{v}}_s - 2\vec{\mathbf{w}}\vec{\mathbf{v}}_s f_s d\vec{\mathbf{w}}$$

l'intégration est triviale

$$\vec{\vec{\mathbf{P}}}_s = \vec{\vec{\mathbf{T}}}_s - n_s m_s \vec{\mathbf{v}}_s \vec{\mathbf{v}}_s \tag{8.1}$$

De même pour les grandeurs sur l'ensemble du plasma

$$\vec{\vec{\mathbf{P}}} = \vec{\vec{\mathbf{T}}} - \rho_m \vec{\mathbf{v}}\vec{\mathbf{v}} \tag{8.2}$$

Remarquons que le flux de quantité de mouvement est une grandeur additive. Cela n'est pas le cas du tenseur de pression :

$$\vec{\vec{\mathbf{P}}} \neq \sum_s \vec{\vec{\mathbf{P}}}_s \tag{8.3}$$

et cela est en contradiction avec ce que l'on raconte dans les bouquins de chimie (pression totale égale somme des pressions partielles). Pourquoi ? Parce qu'en chimie, on a affaire à des fluides collisionnels (sinon il n'y aurait pas de réactions chimiques), et en cas de collisions, toutes les populations de particules ont la même vitesse moyenne. Dans ce cas, l'additivité des pressions est correcte. Ici, sans collisions, les vitesses $\vec{\mathbf{v}}_s$ des différentes populations peuvent être différentes, d'où (8.3).

TAB. 8.1 – définition des grandeurs macroscopiques d'un plasma. NR indique une formule spécifiquement Non Relativiste. L'intégrand est $d\vec{\mathbf{w}}$ pour $f_s(\vec{\mathbf{r}}, \vec{\mathbf{w}}, t)$ et $d\vec{\mathbf{p}}$ pour $f_s(\vec{\mathbf{r}}, \vec{\mathbf{p}}, t)$.

nom	notation	définition
densité de l'espèce s	$n_s(\vec{\mathbf{r}}, t)$	$\int f_s(\vec{\mathbf{r}}, \vec{\mathbf{w}}, t) d\vec{\mathbf{w}}$
densité massique	$\rho_m(\vec{\mathbf{r}}, t)$	$\sum_s m_s n_s$
densité du plasma	$n(\vec{\mathbf{r}}, t)$	$\sum_s n_s$
masse spécifique du plasma	$m(\vec{\mathbf{r}}, t)$	$\frac{\rho_m}{n}$
densité de charges	$\rho_c(\vec{\mathbf{r}}, t)$	$\sum_s q_s n_s$
vitesse moyenne de l'espèce s	$\vec{\mathbf{v}}_s(\vec{\mathbf{r}}, t)$	$\frac{1}{n_s} \int \vec{\mathbf{w}} f_s(\vec{\mathbf{r}}, \vec{\mathbf{w}}, t) d\vec{\mathbf{w}}$
vitesse moyenne du plasma	$\vec{\mathbf{v}}(\vec{\mathbf{r}}, t)$	$\frac{1}{\rho_m} \sum_s n_s m_s \vec{\mathbf{v}}_s$
densité de courant	$\vec{\mathbf{J}}(\vec{\mathbf{r}}, t)$	$\sum_s n_s q_s \vec{\mathbf{v}}_s$
quantité de mouvement	$\bar{\vec{\mathbf{p}}}_{\mathbf{s}}(\tilde{\mathbf{r}}, \mathbf{t})$	$\frac{1}{n_s} \int \vec{\mathbf{w}} f_s(\vec{\mathbf{r}}, \vec{\mathbf{p}}, t) d\vec{\mathbf{p}}$
tenseur de pression de l'espèce NR s	$\vec{\vec{\mathbf{P}}}_s(\vec{\mathbf{r}}, t)$	$m_s \int (\vec{\mathbf{w}} - \vec{\mathbf{v}}_s)(\vec{\mathbf{w}} - \vec{\mathbf{v}}_s) f_s d\vec{\mathbf{w}}$
tenseur de pression du plasma NR	$\vec{\vec{\mathbf{P}}}(\vec{\mathbf{r}}, t)$	$m \int (\vec{\mathbf{w}} - \vec{\mathbf{v}})(\vec{\mathbf{w}} - \vec{\mathbf{v}}) f d\vec{\mathbf{w}}$
tenseur de pression du plasma R	$\vec{\vec{\mathbf{P}}}(\vec{\mathbf{r}}, t)$	$m \int (\vec{\mathbf{p}} - \bar{\vec{\mathbf{p}}})(\vec{\mathbf{w}} - \vec{\mathbf{v}}) f d\vec{\mathbf{p}}$
flux de quantité de mouvement NR	$\vec{\vec{\mathbf{T}}}_s(\vec{\mathbf{r}}, t)$	$m_s \int \vec{\mathbf{w}}\vec{\mathbf{w}} f_s d\vec{\mathbf{w}}$
flux total de quantité de mouvement	$\vec{\vec{\mathbf{T}}}_s(\vec{\mathbf{r}}, t)$	$\sum_s \vec{\vec{\mathbf{T}}}_s$
énergie cinétique macroscopique NR ou énergie de convexion	$K_s(\vec{\mathbf{r}}, t)$	$\frac{n_s m_s}{2} v_s^2$
énergie interne de l'espèce NRs	$u_s(\vec{\mathbf{r}}, t)$	$\frac{1}{2}$ trace $(\vec{\vec{\mathbf{P}}}_s) = \frac{m_s}{2} \int (\vec{\mathbf{w}} - \vec{\mathbf{v}}_s)^2 f_s d$
énergie cinétique (totale) de l'espèce s NR	$U_s(\vec{\mathbf{r}}, t)$	$\frac{m}{2} v_s^2 + u_s = \frac{m_s}{2} \int w^2 f d\vec{\mathbf{w}}$
flux de chaleur de l'espèce s	$\vec{\mathbf{q}}_s(\vec{\mathbf{r}}, t)$	$\frac{m_s}{2} \int (\vec{\mathbf{w}} - \vec{\mathbf{v}}_s)^2 (\vec{\mathbf{w}} - \vec{\mathbf{v}}_s) f_s d\vec{\mathbf{w}}$
flux total d'énergie cinétique (espèce s)	$\vec{\mathbf{S}}_s(\vec{\mathbf{r}}, t)$	$\frac{m_s}{2} \int \vec{\mathbf{w}} w^2 f_s d\vec{\mathbf{w}}$
flux total de chaleur (espèce s)	$\vec{\vec{\vec{\mathbf{Q}}}}_s(\vec{\mathbf{r}}, t)$	$m_s \int (\vec{\mathbf{w}} - \vec{\mathbf{v}}_s)(\vec{\mathbf{w}} - \vec{\mathbf{v}}_s)(\vec{\mathbf{w}} - \vec{\mathbf{v}}_s) f_s$

FIG. 8.1 – Un exemple de distribution en vitesse d'un fluide non collisionnel

Toujours dans cet esprit, il faut noter que les vecteurs de vitesse moyenne et le tenseur de pression dépendent de la façon dont on partitionne le plasma en différentes populations de particules. Prennons l'exemple de distribution en vitesses montré sur la figure 8.1.

On peut considérer que ce gaz est constitué d'une seule population, de vitesse moyenne v nulle ; la vitesse thermique est $v_t \sim u$, et le tenseur de pression (réduit ici a un scalaire car on est en une dimension) $p \sim nmu^2$. On peut dire alors que ce plasma est immobile et chaud.

On a aussi le droit de considérer ce plasma comme la réunion de deux faisceaux composés de particules de vitesses opposées. Soit la population 1, composée de particules allant en arrière, et la population 2 composée de particules allant en avant. Alors $v_1 = -u$ et $v_2 = u$, $v_{t1} = v_{t2} \ll u$ et $p_1 = p_2 \ll nmu^2$. Le plasma est alors considéré comme la réunion de deux populations froides de vitesses moyennes non nulles.

On constate que la pression totale, c'est à dire du plasma dans son ensemble, ce qui correspond au premier cas de figure, et qui vaut $p \sim nmu^2$, n'est pas la somme des pressions des populations 1 et 2.

Dans les deux cas de partition du plasma, qui sont tous deux légitimes, les vitesses moyennes et les pressions sont différentes, la pression n'est pas une grandeur additive. Par contre, le flux de quantité de mouvement, qui est un tenseur du même ordre que le tenseur de pression est additif. Il vaut $T_1 = T_2 \sim nmu^2$ pour les populations 1 et 2. Il vaut $T \sim 2nmu^2$ pour le plasma considéré dans son ensemble, ce qui est bien la somme de T_1 et de T_2.

8.3.2 Quelques relations entre les grandeurs d'ordre trois

Il existe une relation entre le flux de chaleur et le flux total d'énergie cinétique, on la calcule de manière analogue à 8.1. Cela ne soulève pas de difficulté. On trouve

$$\vec{\mathbf{q}}_s = \vec{\mathbf{S}}_s - \vec{\vec{\mathbf{T}}}_s \cdot \vec{\mathbf{v}}_s - \frac{1}{2}(\mathrm{trace}\vec{\vec{\mathbf{T}}})\vec{\mathbf{v}}_s + 2m_s n_s v_s^2 \vec{\mathbf{v}}_s \tag{8.4}$$

le dernier terme s'écrit aussi $2K_s\vec{\mathbf{v}}_s$.

8.4 Les relations de passage entre la forme Eulérienne et la forme Lagrangienne

Les formes Eulériennes ne font intervenir que des dérivées partielles par rapport à des coordonnées fixes. Les équations fluides peuvent aussi s'écrire sous la forme Lagrangienne qui fait intervenir la dérivée convective. Pour démontrer ces équations, on anticipe un peu sur l'équation de conservation 8.14, sans que cela nuise à la cohéreence des calculs (l'équation 8.14 peut être démontrée directement sans référence aux paragraphes qui suivent).

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{\mathbf{v}} \cdot \nabla. \tag{8.5}$$

Le passage d'une forme à l'autre se fait au travers des relations suivantes

$$n\frac{dA}{dt} = \frac{\partial nA}{\partial t} + \nabla\cdot(An\vec{\mathbf{v}}), \tag{8.6}$$

et

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \nabla\cdot(A\vec{\mathbf{v}}) = \frac{dA}{dt} + A\nabla\cdot\vec{\mathbf{v}} = \frac{dA}{dt} - \frac{A}{n}\frac{dn}{dt}. \tag{8.7}$$

Merci au cours de Gérard Belmont pour ce paragraphe.

8.5 Comment on obtient les équations fluides

On les obtient en intégrant les moments successifs de l'équation de Vlasov, par rapport à la vitesse.

On peut d'une façon générale déduire de l'équation de Vlasov des équations de transport d'une grandeur macroscopique (scalaire ou vectorielle dans ce qui va suivre) quelconque $A(\vec{\mathbf{r}}, \vec{\mathbf{w}}, t)$.

On part de l'équation de Vlasov, on la multiplie par $A(\vec{\mathbf{r}}, \vec{\mathbf{w}}, t)$ et on l'intègre par rapport à la vitesse :

$$\int A[\frac{\partial f_s}{\partial t} + \vec{\mathbf{w}} \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \vec{\mathbf{r}}} + \frac{e_s}{m_s}(\vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{w}} \times \vec{\mathbf{B}}) \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \vec{\mathbf{w}}}]d\vec{\mathbf{w}} = 0 \tag{8.8}$$

Le résultat de cette intégration est l'équation de transport de la quantité A, on peut l'appeller *équation de transport généralisée.*

$$\frac{\partial n\overline{A}}{\partial t} - n\overline{\frac{\partial A}{\partial t}} + \nabla \cdot n\overline{\vec{\mathbf{w}}A} - n\overline{\vec{\mathbf{w}} \cdot \nabla A} - \frac{nq}{m}\overline{(\vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{w}} \times \vec{\mathbf{B}}) \cdot \frac{\partial A}{\partial \vec{\mathbf{w}}}} = 0 \tag{8.9}$$

La notation $\overline{a} = \frac{1}{n}\int afd\vec{\mathbf{w}}$ désigne la valeur moyenne de la variable a par rapport à la vitesse $\vec{\mathbf{w}}$. On peut même généraliser encore cette équation pour des forces autres que la force de Lorentz,

$$\frac{\partial n\overline{A}}{\partial t} - n\overline{\frac{\partial A}{\partial t}} + \nabla \cdot n\overline{\vec{\mathbf{w}}A} - n\overline{\vec{\mathbf{w}} \cdot \nabla A} - \frac{n}{m}\overline{\vec{\mathbf{F}} \cdot \frac{\partial A}{\partial \vec{\mathbf{w}}}} = 0, \tag{8.10}$$

où $\vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{r}}, \vec{\mathbf{w}}, t)$ est une force telle que

$$\frac{\partial F_x}{\partial w_x} = \frac{\partial F_y}{\partial w_y} = \frac{\partial F_z}{\partial w_z} = 0. \tag{8.11}$$

Cette condition est remplie par toute force ne dépendant que de la position (force électrique, de gravitation) et par la force magnétique.

Chacune des équations constitue une équation de type fluide établissant des relations entre des grandeurs macroscopiques. Dans les équations fluides rencontrées le plus souvent dans les livres, A ne dépend que de la vitesse. La relation de transport généralisé se simplifie alors

$$\frac{\partial n\overline{A}}{\partial t} + \nabla \cdot n\overline{\vec{\mathbf{w}}A} - \frac{n}{m}\overline{\vec{\mathbf{F}} \cdot \frac{\partial A}{\partial \vec{\mathbf{w}}}} = 0 \tag{8.12}$$

Cette équation est l'équation de conservation de la grandeur $\overline{A}$: le premier terme en représente la variation temporelle, la seconde en représente le flux, le dernier terme correspond aux termes source.

La relation sur le moment d'ordre zéro ($A = 1$) est la conservation du nombre de particules. La relation sur le moment d'ordre un ($A = \vec{\mathbf{A}} = \vec{\mathbf{w}}$) est la conservation de la quantité de mouvement. La relation sur le moment d'ordre deux est la conservation de l'énergie. La suivante porte sur le flux de chaleur. Bien souvent, on ne va pas au delà de l'équation de conservation de l'énergie. Certain programmes de simulation incluent des équations sur les moments d'ordres supèrieurs, mais on ils concernent des plasmas légèrement collisionnels, qui ne sont pas traités ici.

8.5.1 Démonstration de l'équation de transport généralisée

Les termes liés aux dérivées temporelles découlent d'une intégration par parties

$$\begin{aligned}\int A\frac{\partial f}{\partial t}d\vec{\mathbf{w}} &= \frac{\partial}{\partial t}\int Afd\vec{\mathbf{w}} - \int\frac{\partial A}{\partial t}fd\vec{\mathbf{w}} \\ &= \frac{\partial n\overline{A}}{\partial t} - n\overline{\frac{\partial A}{\partial t}}\end{aligned}$$

de même pour les termes dérivés par rapport aux variables d'espace

$$\begin{aligned}\sum_{x,y,z}\int Aw_x\frac{\partial f}{\partial x}d\vec{\mathbf{w}} &= \sum_{x,y,z}[\frac{\partial}{\partial x}\int Aw_xfd\vec{\mathbf{w}} - \int\frac{\partial A}{\partial x}w_xfd\vec{\mathbf{w}}] \\ &= \nabla\cdot n\overline{\vec{\mathbf{w}}A} - n\overline{\vec{\mathbf{w}}\cdot\nabla A}\end{aligned}$$

Les termes liés aux dérivées en vitesses s'intègrent aussi par parties,

$$\begin{aligned}\int A\vec{\mathbf{F}}\cdot\frac{\partial f}{\partial w_x}d\vec{\mathbf{w}} &= \sum_{x,y,z}\int AF_x\frac{\partial f}{\partial\vec{\mathbf{w}}}d\vec{\mathbf{w}} \\ &= \sum_{x,y,z}[\frac{\partial}{\partial w_x}\int AF_xfd\vec{\mathbf{w}} - \int\frac{\partial AF_x}{\partial w_x}fd\vec{\mathbf{w}}] \\ &= \int\nabla\cdot_w(AF_xf)d\vec{\mathbf{w}} - \sum_{x,y,z}\int[\frac{\partial AF_x}{\partial w_x}fd\vec{\mathbf{w}}]\end{aligned}$$

L'opérateur $\nabla\cdot_v$ est un opérateur de divergence dans l'espace des vitesses. C'est aussi sur cet espace que porte l'intégration et on peut transformer la première intégrale en intégrale de surface, dans l'espace des vitesses. L'intégrale sur $\overline{\frac{\partial AF_x}{\partial w_x}}$ se simplifie car $\frac{\partial F_x}{\partial w_x} = 0$,

$$\sum_{x,y,z}\int AF_x\frac{\partial f}{\partial w_x}d\vec{\mathbf{w}} = \int_S AF_xfdS_v - \sum_{x,y,z}\int F_x\frac{\partial A}{\partial w_x}fd\vec{\mathbf{w}}$$

L'intégrale de surface est nulle : il suffit de prendre une sphère de rayon w tendant vers l'infini, et à l'infini, Af est nul, sans quoi, le moment associé à A serait infini, et F_x est nul, sans quoi l'énergie serait infinie, ce qui n'est pas physiquement intéressant (ou bien j'attend qu'on me montre un contre exemple, si t'est cap ami lecteur, écris moi au `fabrice.mottez@obspm.fr`). La seconde intégrale fait apparaitre la valeur moyenne

$$\int A\vec{\mathbf{F}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{\mathbf{w}}} d\vec{\mathbf{w}} \quad = \quad -\sum_{x,y,z} n\overline{\vec{\mathbf{F}}\frac{\partial A}{\partial w_x}}$$

En mettant tout ce qu'on a vu dans ce paragraphe ensemble, on trouve la relation de transport (8.10), CQFD.

8.5.2 Une impasse

Que se passe-t-il si on employe la relation (8.12) si A ne dépend pas de $\vec{\mathbf{w}}$, mais seulement du temps et de la position ? Et bien, on développe les termes ; on trouve $\overline{A} = A$, $n\overline{\vec{\mathbf{w}}A} = \vec{\mathbf{v}}A$, $n\overline{\vec{\mathbf{w}} \cdot \nabla A} = \vec{\mathbf{v}} \cdot \nabla A$, $n\overline{\partial_t(A)} = \partial_t A + (A/n)\partial_t n$ et la relation de transport se ŕesume à $A(-\partial_t n + n\nabla \cdot \vec{\mathbf{v}}) = 0$, ce que l'on avait déjà trouvé en prennant $A = 1$. Conclusion : rien de neuf n'est à espérer si A ne dépend pas de $\vec{\mathbf{w}}$.

8.6 Conservation du nombre de particules

On obtient l'équation de conservation de la matière (ou équation de continuité) en calculant le premier moment de l'équation de Vlasov. Autrement dit, il suffit d'appliquer (8.12) avec $A = 1$. Le résultat est immédiat. Sous forme Eulérienne,

$$\frac{\partial n_s}{\partial t} + \nabla \cdot (n_s \vec{\mathbf{v}}_s) = 0 \tag{8.13}$$

ou encore, sous forme Lagrangienne

$$\frac{dn_s}{dt} + n_s \nabla \cdot \vec{\mathbf{v}}_s = 0. \tag{8.14}$$

On peut faire une démonstration directe, sans recours à (8.10), mais en fait, les calculs faits reviennent au même. Pour chaque espèce s de particules,

$$\int [\frac{\partial f_s}{\partial t} + \vec{\mathbf{w}} \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \vec{\mathbf{r}}} + \frac{e_s}{m_s}(\vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{w}} \times \vec{\mathbf{B}}) \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \vec{\mathbf{w}}}] d\vec{\mathbf{w}} = 0 \tag{8.15}$$

où il est entendu que n'ayant pas de collision, et ne prennant pas en compte des effets de désintégration spontanée ou stimulée, le taux de création et le taux de disparition de l'espèce s sont nuls. D'où le 0 au membre de droite. On a assez de problèmes avec ces foutus plasmas, on ne va pas en plus y rajouter de la chimie. Les deux premiers tremes s'intègrent directement. Pour le troisième, on a des opérateurs Nabla qui portent dans l'espace des vitesses. Par exemple, la relation $\nabla\cdot(f\vec{\mathbf{a}}) = f\nabla\cdot\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{a}}\cdot\nabla f$ nous montre que $\vec{\mathbf{w}} \times \vec{\mathbf{B}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{\mathbf{w}}} = \frac{\partial \vec{\mathbf{w}} \times \vec{\mathbf{B}}}{\partial \vec{\mathbf{w}}} - f \frac{\partial}{\partial \vec{\mathbf{w}}} \vec{\mathbf{w}} \times \vec{\mathbf{B}}$. Or vérifie sans peine que le dernier terme est nul. Ensuite, on peut employer le thérorème kidike $\int_V \nabla\cdot_v \vec{\mathbf{a}} d\vec{\mathbf{w}} = \int_S \vec{\mathbf{a}} dS$ où S représente une surface englobant le volume V de l'espace des vitesses. En prennant S correspondant à des vitesses tendant vers l'infini et si les fonctions sont assez gentilles, l'intégrale de surface tends vers zéro.

8.7 Conservation de la quantité de mouvement

On obtient l'équation de conservation de la quantité de mouvement ou équation de transport en prennant $\vec{\mathbf{A}} = m\vec{\mathbf{w}}$. On s'intéresse à l'espèce s et l'on exprime les valeurs moyennes à l'aide des grandeurs macroscopiques définie dans le tableau (8.3). Pour alléger les notations, on omet les indices s, mais il est entendu que les grandeurs macroscopiques se rapportent toutes à l'espèce s. La relation de transport (8.12) s'écrit alors

$$m\frac{\partial n\vec{\mathbf{v}}}{\partial t} + \nabla\cdot nm\overline{\vec{\mathbf{w}}\vec{\mathbf{w}}} - qn(\vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}}) = 0 \tag{8.16}$$

On peut développer la dérivée temporelle et utiliser l'equation de conservation de la matière (8.13), ce qui fait apparaitre une divergence $-\nabla\cdot(nm\vec{\mathbf{v}})$. La valeur moyenne de $nm\vec{\mathbf{w}}\vec{\mathbf{w}}$ est un tenseur qui représente le flux de quantité de mouvement associé à l'espèce s. On peut faire apparaitre la vitesse moyenne, et mettre en évidence le tenseur de pression :

$$\begin{aligned}
\nabla\cdot(nm\overline{\vec{\mathbf{w}}\vec{\mathbf{w}}}) &= \nabla\cdot(nm\overline{(\vec{\mathbf{w}}-\vec{\mathbf{v}})(\vec{\mathbf{w}}-\vec{\mathbf{v}})} + 2nm\vec{\mathbf{v}}\overline{\vec{\mathbf{w}}} - nm\vec{\mathbf{v}}\vec{\mathbf{v}}) \qquad (8.17)\\
&= \nabla\cdot(nm\overline{(\vec{\mathbf{w}}-\vec{\mathbf{v}})(\vec{\mathbf{w}}-\vec{\mathbf{v}})} + nm\vec{\mathbf{v}}\vec{\mathbf{v}})\\
&= \nabla\cdot\vec{\vec{\mathbf{P}}} + \nabla\cdot(nm\vec{\mathbf{v}}\vec{\mathbf{v}})\\
&= \nabla\cdot\vec{\vec{\mathbf{P}}} + \vec{\mathbf{v}}\nabla\cdot(nm\vec{\mathbf{v}}) + nm\vec{\mathbf{v}}\nabla\vec{\mathbf{v}}.
\end{aligned}$$

L'équation de transport devient

$$mn\frac{\partial \vec{\mathbf{v}}}{\partial t} - \vec{\mathbf{v}}\nabla\cdot(nm\vec{\mathbf{v}}) + \nabla\cdot\vec{\vec{\mathbf{P}}} + \vec{\mathbf{v}}\nabla\cdot(nm\vec{\mathbf{v}}) + nm\vec{\mathbf{v}}\cdot\nabla\vec{\mathbf{v}} - qn(\vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}}) = 0 \tag{8.18}$$

ce qui fait, après le ménage et en remettant les indices :

$$m_s n_s \frac{\partial \vec{\mathbf{v}}_s}{\partial t} + n_s m_s \vec{\mathbf{v}}_s \cdot \nabla \vec{\mathbf{v}}_s + \nabla \cdot \vec{\vec{\mathbf{P}}}_s - q_s n_s (\vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{v}}_s \times \vec{\mathbf{B}}) = 0 \tag{8.19}$$

La forme ci-dessus ne fait appel qu'à des dérivés partielles, c'est la forme Eulérienne. Sous forme Lagrangienne,

$$n_s m_s \frac{d\vec{\mathbf{v}}_\mathbf{s}}{dt} + \nabla \cdot \vec{\vec{\mathbf{P}}}_s - q_s n_s (\vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{v}}_s \times \vec{\mathbf{B}}) = 0 \tag{8.20}$$

8.8 Conservation de l'énergie

8.8.1 Conservation de l'énergie interne

Ici, $A = \frac{m_s}{2}(\vec{\mathbf{w}} - \vec{\mathbf{v}})^2$ représente l'écart entre l'énergie cinétique pour la vitesse w et l'énergie cinétique macroscopique. Comme A dépend, par le biais de $\vec{\mathbf{v}}$, de la position et du temps, la relation (8.12) n'est point complète, la relation juste est (8.10), qui devient (on omet les indices s)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot (\frac{nm}{2}\overline{\vec{\mathbf{w}}(\vec{\mathbf{w}} - \vec{\mathbf{v}})^2}) - \frac{n}{2}\overline{\vec{\mathbf{F}} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{\mathbf{w}}}(\vec{\mathbf{w}} - \vec{\mathbf{v}})^2} - \frac{nm}{2}\overline{\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\mathbf{w}} - \vec{\mathbf{v}})^2} - \frac{nm}{2}\overline{\vec{\mathbf{w}} \cdot \nabla(\vec{\mathbf{w}} - \vec{\mathbf{v}})^2} = 0 \tag{8.21}$$

En vertu de (8.11) on peut sortir la force de la moyenne dans le troisième terme, le calcul de la dérivée donne $2(\vec{\mathbf{w}} - \vec{\mathbf{v}})$ et $\vec{\mathbf{F}} \cdot \overline{(\vec{\mathbf{w}} - \vec{\mathbf{v}})} = 0$. Le flux de l'énergie interne (second terme) se calcule ainsi

$$\begin{aligned} \frac{nm}{2}\overline{\vec{\mathbf{w}}(\vec{\mathbf{w}} - \vec{\mathbf{v}})^2} &= \frac{m}{2}\int \vec{\mathbf{w}}(\vec{\mathbf{w}} - \vec{\mathbf{v}})^2 f d\vec{\mathbf{w}} \\ &= \frac{m}{2}[\int (\vec{\mathbf{w}} - \vec{\mathbf{v}})(\vec{\mathbf{w}} - \vec{\mathbf{v}})^2 f d\vec{\mathbf{w}} + \vec{\mathbf{v}} \int (\vec{\mathbf{w}} - \vec{\mathbf{v}})^2 f d\vec{\mathbf{w}}] \\ &= \vec{\mathbf{q}} + \vec{\mathbf{v}} u \end{aligned} \tag{8.22}$$

Les 4e et 5e termes sont liés à la dépendance de v par rapport au temps et à la position. Le terme de dépendance temporelle $\frac{nm}{2}\frac{\partial}{\partial t}\vec{\mathbf{v}}\overline{(\vec{\mathbf{w}} - \vec{\mathbf{v}})}$ est nul. Le terme de dépendance spatiale se développe ainsi

$$\begin{aligned} -\frac{nm}{2}\vec{\mathbf{w}} \cdot \nabla(\vec{\mathbf{w}} - \vec{\mathbf{v}})^2 &= -nm\sum_{i,j} w_i(w_j - v_j)\partial_i v_j \\ &= nm w_i w_j \partial_i v_j - nm v_j w_i \partial_i v_j \end{aligned}$$

La moyenne de cette expression est

$$\begin{aligned} &= T_{i,j}\partial_i v_j - m v_i v_j \partial v_j \\ &= \vec{\vec{\mathbf{T}}} \cdot \cdot \nabla \vec{\mathbf{v}} - \vec{\mathbf{v}} \cdot \nabla \frac{mv^2}{2} \end{aligned}$$

On applique la relation (8.1) dans le terme de dépendance spatiale

$$\begin{aligned} -\frac{nm}{2}\overline{\vec{\mathbf{w}} \cdot \nabla(\vec{\mathbf{w}} - \vec{\mathbf{v}})^2} &= (\vec{\vec{\mathbf{P}}} + \vec{\mathbf{v}}\vec{\mathbf{v}}) \cdot \cdot \nabla \vec{\mathbf{v}} - \vec{\mathbf{v}} \cdot \nabla \frac{mv^2}{2} \\ &= \vec{\vec{\mathbf{P}}} \cdot \cdot \nabla \vec{\mathbf{v}} \end{aligned}$$

où on a développé les composantes des termes de vitesses et constaté qu'ils sont opposés.

Ainsi, (en remettant les indices)

$$\frac{\partial u_s}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{\mathbf{q}}_s + \vec{\mathbf{v}}_s u_s) + \vec{\vec{\mathbf{P}}} \cdot \cdot \nabla \vec{\mathbf{v}} = 0 \tag{8.23}$$

ou encore,

$$\frac{\partial u_s}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{\mathbf{q}}_s + \vec{\mathbf{v}}_s u_s + \vec{\vec{\mathbf{P}}} \cdot \vec{\mathbf{v}}) - \nabla \cdot \vec{\vec{\mathbf{P}}} \cdot \vec{\mathbf{v}} = 0. \tag{8.24}$$

8.8.2 Conservation de l'énergie cinétique

Avec $A = \frac{m_s}{2}\vec{\mathbf{w}}^2$ représentant l'énergie cinétique (interne plus convection), la relation (8.12) devient

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{m_s}{2}v_s^2 + u_s + \nabla \cdot (n_s m_s \overline{\vec{\mathbf{w}}\vec{\mathbf{w}}^2}) - \frac{n_s}{2}\overline{\vec{\mathbf{F}}_s \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{\mathbf{w}}}\vec{\mathbf{w}}^2} = 0 \tag{8.25}$$

Le troisième terme est non nul. Traité comme au paragraphe précédent, on trouve $n\vec{\mathbf{F}}_s \cdot \vec{\mathbf{v}}_s$. Le second terme est le flux total d'énergie cinétique S_s (8.3), des développements des moments d'ordre trois font apparaitre la relation

$$\vec{\mathbf{S}}_s = \frac{m_s}{2}v_s^2\vec{\mathbf{v}}_s + u_s\vec{\mathbf{v}}_s + \vec{\vec{\mathbf{P}}} \cdot \vec{\mathbf{v}}_s + \vec{\mathbf{q}} \tag{8.26}$$

La conservation de l'énergie s'écrit alors

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{n_s m_s}{2}v_s^2 + \frac{\partial u_s}{\partial t} + \nabla \cdot (\frac{m_s}{2}v_s^2\vec{\mathbf{v}}_s + u_s\vec{\mathbf{v}}_s + \vec{\vec{\mathbf{P}}}_s \cdot \vec{\mathbf{v}}_s + \vec{\mathbf{q}}_s) - n\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\vec{\mathbf{F}}} = 0 \tag{8.27}$$

et dans le cas de la force de Lorentz, la force magnétique disparait du dernier terme

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{n_s m_s}{2}v_s^2 + u_s + \nabla\cdot(\frac{m_s}{2}v_s^2\vec{\mathbf{v}}_s + u_s\vec{\mathbf{v}}_s + \vec{\vec{\mathbf{P}}}_s\cdot\vec{\mathbf{v}}_s + \vec{\mathbf{q}}_s) - n\vec{\mathbf{v}}\cdot\vec{\mathbf{E}} = 0. \quad (8.28)$$

8.8.3 Conservation de l'énergie cinétique de convexion

La différence entre l'équation de l'énergie cinétique totale (8.28) et celle de l'énergie interne (8.24) montre que

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{n_s m_s}{2}v_s^2 + \nabla\cdot(\frac{m_s}{2}v_s^2\vec{\mathbf{v}}_s) - n\vec{\mathbf{v}}\cdot\vec{\mathbf{E}} + \nabla\cdot\vec{\vec{\mathbf{P}}}\cdot\vec{\mathbf{v}} = 0. \quad (8.29)$$

8.8.4 Transport du tenseur de pression

Si le tenseur de pression n'est pas un tenseur scalaire, la relation 8.24 ne fournit pas assez d'information pour clore le système d'équations. Il faut une équation qui exprime l'évolution temporelle de la totalité du tenseur de pression. Il faut choisir pour A le tenseur $\vec{\vec{\mathbf{A}}} = m_s(\vec{\mathbf{w}} - \vec{\mathbf{v}}_s)(\vec{\mathbf{w}} - \vec{\mathbf{v}}_s)$. Sous forme Eulérienne,

$$\frac{\partial\vec{\vec{\mathbf{P}}}_s}{\partial t} + \nabla\cdot(\vec{\mathbf{v}}_s\vec{\vec{\mathbf{p}}}_s + \vec{\vec{\vec{\mathbf{Q}}}}_s) + [\vec{\vec{\mathbf{p}}}_s\cdot\nabla\vec{\mathbf{v}}_s + \omega_{cs}\times\vec{\vec{\mathbf{p}}}_s] + [\vec{\vec{\mathbf{p}}}_s\cdot\nabla\vec{\mathbf{v}}_s + \omega_{cs}\times\vec{\vec{\mathbf{p}}}_s]^t = 0 \quad (8.30)$$

où l'exposant t indique la transposition. Sous forme Lagrangienne,

$$n\frac{d}{dt}\frac{\vec{\vec{\mathbf{p}}}_s}{n} + \nabla\cdot\vec{\vec{\vec{\mathbf{Q}}}}_s + [\vec{\vec{\mathbf{p}}}_s\cdot\nabla\vec{\mathbf{v}}_s + \omega_{cs}\times\vec{\vec{\mathbf{p}}}_s] + [\vec{\vec{\mathbf{p}}}_s\cdot\nabla\vec{\mathbf{v}}_s + \omega_{cs}\times\vec{\vec{\mathbf{p}}}_s]^t = 0. \quad (8.31)$$

ou encore

$$\frac{d}{dt}\vec{\vec{\mathbf{p}}}_s - \frac{1}{n}\frac{dn}{dt}\vec{\vec{\mathbf{p}}}_s + \nabla\cdot\vec{\vec{\vec{\mathbf{Q}}}}_s + [\vec{\vec{\mathbf{p}}}_s\cdot\nabla\vec{\mathbf{v}}_s + \omega_{cs}\times\vec{\vec{\mathbf{p}}}_s] + [\vec{\vec{\mathbf{p}}}_s\cdot\nabla\vec{\mathbf{v}}_s + \omega_{cs}\times\vec{\vec{\mathbf{p}}}_s]^t = 0. \quad (8.32)$$

Le produit $\vec{\mathbf{v}}_s\vec{\vec{\mathbf{p}}}_s$ est un tenseur d'ordre 3 défini simplement par $(\vec{\mathbf{v}}\vec{\vec{\mathbf{p}}})_{ijk} = v_i p_{jk}$. Le produit $\omega_c \times \vec{\vec{\mathbf{p}}}$ est un tenseur dont la première colonne est le produit vectoriel de ω_c et de la première colonne de $\vec{\vec{\mathbf{P}}}$, et ainsi de suite pour les deux autres colonnes. La divergence d'un tenseur est la somme des dérivées portant sur le premier indice. Par exemple, la divergence du tenseur $\vec{\vec{\vec{\mathbf{Q}}}}$ d'ordre 3, $\nabla\cdot\vec{\vec{\vec{\mathbf{Q}}}}$, est un tenseur d'ordre deux et $(\nabla\cdot\vec{\vec{\vec{\mathbf{Q}}}})_{ij} = \sum_k \partial_k Q_{kij}$.

8.9 Equations des gaz, lois d'Ohm et compagnie

On les construit à partir des relations qui précèdent, en sommant sur les différentes espèces de particules, en multipliant par des coefficients ad hoc. Rien de bien sorcier.

8.9.1 Equations de la MHD

En MHD, il y a des approximations sur les équations de Maxwell, et d'autres sur les équations fluides. En particulier, on considère que la matrice de pression est une matrice scalaire.

8.9.2 La conservation de la charge électrique et de la masse

On somme les équations du type de (8.13) pour chaque espèce de particules, on en déduit l'équation de conservation de la masse

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla\cdot\vec{\rho_{\mathbf{m}}}\mathbf{v} = 0 \tag{8.33}$$

On somme les équations du type de (8.13) pour chaque espèce de particules en pondérant par les charges électriques, on en déduit l'équation de conservation des charges électriques

$$\frac{\partial \rho_c}{\partial t} + \nabla\cdot\vec{\mathbf{J}} = 0 \tag{8.34}$$

8.9.3 La conservation de la quantité de mouvement

On somme les équations du type de (8.16) pour chaque espèce de particules, et on exprime le flux de quantité de mouvement en fonction des vitesses et de la pression

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho_m\vec{\mathbf{v}} + \nabla\cdot(\sum_s \vec{\vec{\mathbf{T}}}_s) = \rho_c\vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{J}} \times \vec{\mathbf{B}} \tag{8.35}$$

Dans le premier terme, on peut développer la dérivée du produit et employer la conservation de la masse :

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho_m\vec{\mathbf{v}} = \rho_m\frac{\partial\vec{\mathbf{v}}}{\partial t} - \vec{\mathbf{v}}\nabla\cdot(\rho_m\vec{\mathbf{v}})$$

et d'après (8.2), le second terme vaut $\nabla\cdot\vec{\vec{\mathbf{P}}} + \nabla\cdot(\rho_m\vec{\mathbf{v}}\vec{\mathbf{v}}) = \nabla\cdot\vec{\vec{\mathbf{P}}} + 2\vec{\mathbf{v}}\nabla\cdot(\rho_m\vec{\mathbf{v}})$. En définitive :

$$\rho_m\frac{\partial}{\partial t}\vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{v}}\nabla\cdot(\rho_m\vec{\mathbf{v}}) + \nabla\cdot\vec{\vec{\mathbf{P}}} = \rho_c\vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{J}} \times \vec{\mathbf{B}} \tag{8.36}$$

Chapitre 9

Magnéto-Hydro-Dynamique

9.1 Dérivation des équations de la MHD

La section 9.2 présente les équations de la MHD en évitant d'introduire une quelconque équation de fermeture portant sur p. On traite donc un système incomplet d'équations. On peut néanmoins en déduire un certain nombre de propriétés qui seront exposées.

La section 9.4 traitera de ces équations de fermetures, qui sont nombreuses, et rarement satisfaisantes.

La section suivante présente les équations de la MHD Hall.

Puis on traitera des ondes MHD.

9.2 Les équations classiques de la MHD idéale

9.2.1 Les équations les plus simples pour un plasma compressible

L'équation de continuité s'écrit

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{\mathbf{v}}) = 0 \tag{9.1}$$

ou encore

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \vec{\mathbf{v}} = 0 \tag{9.2}$$

L'équation de transport s'écrit

$$\rho d\vec{\mathbf{v}}/dt = \vec{\mathbf{J}} \times \vec{\mathbf{B}} - \nabla p. \tag{9.3}$$

Le lien entre le champ électrique et le champ magnetique se résume ici à

$$\vec{\mathbf{E}} = -\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}} \tag{9.4}$$

où $\vec{\mathbf{E}}$ est le champ électrique dans le repère du laboratoire. Pour en arriver là, on a supposé une loi d'Ohm $\vec{\mathbf{J}} = \sigma \vec{\mathbf{E}}'$ où σ est une conductivité qui, MHD idéale oblige, tends vers l'infini. Le champ $\vec{\mathbf{E}}'$ est le champ electrique dans le repère du plasma qui est lié à $\vec{\mathbf{E}}$ par la transformation de Lorentz $\vec{\mathbf{E}}' = \vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}}$. L'équation (9.4) servira à éliminer le champ électrique des autres équations de la MHD, ce qui ne signifie nullement qu'il soit nul. Par exemple, en éliminant $\vec{\mathbf{E}}$ de l'équation de Faraday $\nabla \times \vec{\mathbf{E}} = -\partial \vec{\mathbf{B}}/\partial t$, on obtient

$$\partial \vec{\mathbf{B}}/\partial t = \nabla \times (\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}}). \tag{9.5}$$

L'équation d'Ampère s'écrit

$$\nabla \times \vec{\mathbf{B}} = \mu_0 \vec{\mathbf{J}} \tag{9.6}$$

à condition que l'on puisse négliger $\partial \vec{\mathbf{E}}/\partial t$, ce qui revient à $(v/c)^2 \ll 1$ et $V_A/c \ll 1$.

La divergence du champ magnétique est nulle

$$\nabla \cdot \vec{\mathbf{B}} = 0. \tag{9.7}$$

L'équation sur la divergence du champ électrique $\nabla \cdot \vec{\mathbf{E}} = \rho_e/\epsilon_0$ ne fait pas partie des équations de la MHD. La question de la MHD et de la densité de charge sera abordée au paragraphe 9.5.

Les équations (9.1),(9.3),(9.4),(9.6), (9.7),(9.5) completées par une équation de fermeture (qui relie la pression aux autres variables) constituent la base de la MHD idéale. Une approche plus complète de la MHD consiste à ne pas utiliser d'équation de fermeture pour la pression. Il faut alors une équation de conservation de l'énergie, qui décrira l'évolution de la pression. Evidement, l'équation de l'énergie fait apparaître une nouvelle grandeur, c'est le flux de chaleur $\mathbf{q}$, et il faut la compléter par une équation de fermeture portant sur le flux de chaleur.

9.2.2 Le théorème du champ gelé

Il a été démontré au paragraphe 3.3.2 que deux éléments de plasma initialement sur la même ligne de champ, restent, pour un plasma idéal, à n'importe quel instant. C'est le théorème du champ gelé. Ce théorème interdit *a priori* à des éléments de plasma sur des lignes de champ différentes de se retrouver plus tard sur la même ligne de champ. Donc il n'y a pas d'échange de matière dans un plasma idéal entre régions connectées à des lignes de champ différentes. L'étude des situations où se théorème n'est plus valable est la théorie de la reconnexion ("reconnection" en anglais).

9.2.3 La conservation de l'énergie

On peut distinguer trois formes d'énergie et écrire une équation de transport pour chacune d'entre elles. On peut écrire ces trois équations sous forme conservative. Comme l'énergie totale est conservée, la somme de ces trois équations est strictement conservative.

L'énergie cinétique dirigée :

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\rho v^2}{2} + \nabla\cdot(\frac{\rho v^2}{2}\vec{\mathbf{v}}) = -\nabla p \cdot \vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{j}} \cdot \vec{\mathbf{E}}. \tag{9.8}$$

L'énergie thermique :

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{3}{2}p + \nabla\cdot(\frac{5}{2}p\vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{q}}) = \nabla p \cdot \vec{\mathbf{v}}. \tag{9.9}$$

On remarque la nouvelle grandeur introduite dans cette équation : le flux de chaleur $\vec{\mathbf{q}}$. C'est sur ce terme que devra porter l'équation de fermeture des équations MHD incluant l'équation de l'énergie.

L'énergie électromagnétique 3.70, vue en considérant le plasma comme une assemblée de charges dans le vide est rappelée ici :

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{B^2}{2\mu_0} + \nabla\cdot(\frac{\vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{B}}}{\mu_0}) = -\vec{\mathbf{j}} \cdot \vec{\mathbf{E}}. \tag{9.10}$$

Le terme d'énergie électrique $\epsilon_0 E^2/2$ est négligé devant l'énergie magnétique. En effet, on suppose en MHD que le rapport E/B est une vitesse de l'ordre de grandeur de la vitesse d'Alfvén V_A et que $V_A \ll c$. De $\mu_0\epsilon_0 c^2 = 1$, il découle que $\epsilon_0 E^2/2 \ll B^2/2\mu_0$.

Les termes des membres de droites des équations (9.8), (9.9), (9.10) sont des termes de création/disparition qui traduisent les échanges entre les trois différentes formes d'énergie. L'énergie totale est la somme de ces trois énergies ; elle est conservée, les termes de création/disparition dans le membre de droite sont nuls :

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\rho v^2}{2} + \frac{3}{2}p + \frac{B^2}{\mu_0} + \nabla\cdot[(\frac{\rho v^2}{2} + \frac{5}{2}p)\vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{q}} + \frac{\vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{B}}}{\mu_0}] = 0. \tag{9.11}$$

Compte tenu de (9.4), on peut éliminer le champ électrique de cette équation (on pourrait le faire aussi pour (9.10)),

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\rho v^2}{2} + \frac{3}{2}p + \frac{B^2}{\mu_0} + \nabla\cdot[(\frac{\rho v^2}{2} + \frac{5}{2}p)\vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{q}} + \frac{\vec{\mathbf{v}}B^2 - \vec{\mathbf{B}}(\vec{\mathbf{v}}\cdot\vec{\mathbf{B}})}{\mu_0}] = 0. \quad (9.12)$$

Pour prendre en compte l'équation de l'énergie dans la MHD, il suffit de considérer, en plus des équations vues précédement (9.1),(9.3), (9.4),(9.6), (9.7),(9.5) l'équation (9.12). La prise en compte des trois équations qui précèdent n'est utile que pour étudier les transferts entre les différentes formes d'énergie.

9.2.4 Autres formulations des ces équations de base

La relation vectorielle

$$\nabla\times(\vec{\mathbf{A}}\times\vec{\mathbf{B}}) = \vec{\mathbf{A}}(\nabla\cdot\vec{\mathbf{B}}) - \vec{\mathbf{B}}(\nabla\cdot\vec{\mathbf{A}}) + (\vec{\mathbf{B}}\cdot\nabla)\vec{\mathbf{A}} - (\vec{\mathbf{A}}\cdot\nabla)\vec{\mathbf{B}} \quad (9.13)$$

et les équations de Faraday (9.5) et de divergence (9.7), montrent que

$$\frac{d\vec{\mathbf{B}}}{dt} = -\vec{\mathbf{B}}(\nabla\cdot\vec{\mathbf{v}}) + (\vec{\mathbf{B}}\cdot\nabla)\vec{\mathbf{v}}. \quad (9.14)$$

Si on combine cela avec l'équation de continuité, on obtient l'équation d'Helmholtz

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{\mathbf{B}}}{\rho}\right) = \left(\frac{\vec{\mathbf{B}}}{\rho}\cdot\nabla\right)\vec{\mathbf{v}}. \quad (9.15)$$

L'équation de transport (9.3) peut être écrite sous une forme très utile, en éliminant le courant avec l'équation d'Ampère, et avec l'identité

$$(\nabla\times\vec{\mathbf{B}})\times\vec{\mathbf{A}} = (\vec{\mathbf{A}}\cdot\nabla)\vec{\mathbf{B}} - (\nabla\vec{\mathbf{B}})\cdot\vec{\mathbf{A}}. \quad (9.16)$$

Le terme de force exercé sur un élement de plasma se réparti suivant un terme de gradient de pression $p + B^2/2\mu_0$ et un terme dù à la courbure des lignes de champ :

$$\rho\frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt} = -\nabla\left(p + \frac{B^2}{2\mu_0}\right) + \frac{1}{\mu_0}(\vec{\mathbf{B}}\cdot\nabla)\vec{\mathbf{B}}. \quad (9.17)$$

Le rôle de la courbure apparait plus explicitement si on prend en compte l'abscisse curviligne s le long d'une ligne de champ

$$(\vec{\mathbf{B}} \cdot \nabla) = B\frac{\partial}{\partial s}. \tag{9.18}$$

Avec les relations géométriques définissant de rayon de courbure R à l'aide des vecteurs du repère de Frénet $\vec{\mathbf{b}}$ (vecteur tangent) et $\vec{\mathbf{n}}$ (vecteur normal) associé à la ligne de champ

$$\frac{\partial \vec{\mathbf{b}}}{\partial s} = \frac{\vec{\mathbf{n}}}{R} \tag{9.19}$$

et le gradient perpendiculaire

$$\nabla_{\perp} = \nabla - \vec{\mathbf{b}}\frac{\partial}{\partial s} \tag{9.20}$$

l'équation (9.17) devient alors

$$\rho\frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt} = -\nabla p - \nabla_{\perp}\left(\frac{B^2}{2\mu_0}\right) + \frac{1}{R}\left(\frac{B^2}{\mu_0}\right)\vec{\mathbf{n}}. \tag{9.21}$$

9.3 La MHD avec un plasma incompressible

Un plasma incompressible est tel que

$$\frac{d\rho}{dt} = 0 \tag{9.22}$$

ce qui est équivalent, d'après l'équation de continuité à

$$\nabla \cdot \vec{\mathbf{v}} = 0. \tag{9.23}$$

9.3.1 Equations d'Elsässer

Les équations obtenues ci dessus se simplifient. L'équation de transport peut s'écrire en faisant apparaître la vitesse d'Alfven $\vec{\mathbf{V}}_A = \vec{\mathbf{B}}/(\rho\mu_o)^{1/2}$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{\mathbf{v}} \cdot \nabla\right)\vec{\mathbf{v}} = -\nabla\left(\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}\vec{\mathbf{V}}_A^2\right) + (\vec{\mathbf{V}}_A \cdot \nabla)\vec{\mathbf{V}}_A. \tag{9.24}$$

L'équation de Helhmoltz devient

$$\frac{d}{dt}(\vec{\mathbf{B}}) = (\vec{\mathbf{B}} \cdot \nabla)\vec{\mathbf{v}}. \tag{9.25}$$

ou encore

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{\mathbf{v}} \cdot \nabla\right) \vec{\mathbf{V}}_A = (\vec{\mathbf{V}}_A \cdot \nabla)\vec{\mathbf{v}}. \tag{9.26}$$

A ce stade, il est possible d'écrire le système (9.24),(9.26), sous une forme assez symétrique, en faisant apparaître les variables d'Elsässer $\vec{\mathbf{z}}^{\pm} = \vec{\mathbf{v}} \pm \vec{\mathbf{V}}_A$

$$\frac{\partial \vec{\mathbf{z}}^+}{\partial t} + \vec{\mathbf{z}}^- \cdot \nabla \vec{\mathbf{z}}^+ = -\nabla \left(\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}\vec{\mathbf{V}}_A^2\right) \tag{9.27}$$

$$\frac{\partial \vec{\mathbf{z}}^-}{\partial t} + \vec{\mathbf{z}}^+ \cdot \nabla \vec{\mathbf{z}}^- = -\nabla \left(\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}\vec{\mathbf{V}}_A^2\right).$$

Ces équations permettent, entre autres, de trouver une solution d'équilibre MHD incompressible : $\vec{\mathbf{z}}^+ = 0$ ou $\vec{\mathbf{z}}^- = 0$, ce qui correspond à $\vec{\mathbf{v}} = \pm\vec{\mathbf{V}}_A$ et $\nabla(p/\rho + \frac{1}{2}\vec{\mathbf{V}}_A^2) = 0$. Chandrasekhar [1963] a montré que cet équilibre est stable. Il existe une autre solution simple de ce système : $v = 0$, $\nabla(p/\rho + \frac{1}{2}\vec{\mathbf{V}}_A^2) = 0$ et $(\vec{\mathbf{B}} \cdot \nabla)\vec{\mathbf{B}} = 0$.

9.3.2 Les invariants de la MHD incompressible

Dans le cas d'un plasma incompressible, trois grandeurs sont invariantes ; la densité d'énergie totale,

$$E = \frac{1}{2}\int d\vec{\mathbf{r}}(v^2 + v_A^2) \tag{9.28}$$

l'intégrale de cross-hélicité

$$H_c = \int d\vec{\mathbf{r}}(\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{V}}_A) \tag{9.29}$$

et l'hélicité magnétique

$$H_m = \int d\vec{\mathbf{r}}(\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}}) \tag{9.30}$$

où $\vec{\mathbf{A}}$ est le potentiel vecteur magnétique. En variables d'Elsässer, on peut définir

$$E^{\pm} = \int d\vec{\mathbf{r}}(z^{\pm}) \tag{9.31}$$

$$E = \frac{1}{2}(E^+ + E^-) \text{ et } H_c = \frac{1}{2}(E^+ - E^-) \tag{9.32}$$

9.4 Les équations de fermeture de la MHD

En fait, il est assez utile de discuter des équations de fermeture des équations multifluides en général, la MHD étant un cas particulier de celles ci.

9.4.1 La MHD avec un plasma froid

Cela revient à prendre les équations (9.1),(9.3),(9.4),(9.6), (9.7), en les complétant avec l'équation de fermeture très simple

$$\nabla p = 0. \tag{9.33}$$

9.4.2 Equation d'état polytropique

On complète les équations (9.1),(9.3),(9.4),(9.6), avec l'équation de fermeture

$$\frac{d}{dt}(p/\rho^\gamma) = 0 \tag{9.34}$$

où γ est un indice polytropique, bien souvent pris égal à 5/3. C'est assez arbitraire. Il conviendra de revenir de façon beaucoup plus approfondie sur les équations de fermeture de la MHD (ou des autres théories de type fluide en général).

Une autre équation de fermeture assez générale correspond à une pression isotrope qui ne dépend que de la densité, mais sans que l'on précise le type de cette dépendance :

$$p = f(\rho). \tag{9.35}$$

Dans le cas d'une transformation adiabatique, $\gamma = 5/3$, la définition de la vitesse du son a un sens (réaction à une perturbation de pression assez rapide par rapport aux échanges de chaleur), elle est définie par $C_s^2 = f'(\rho) = \gamma p/\rho$. Lors de la propagation d'une onde sonore, la pression varie assez vite pour que des échanges d'énergie n'aient pas le temps de se produire, c'est pour cela que l'approximation adiabatique est pertinente.

Dans le cas d'une transformation isotherme, c'est à dire dans le cas de transformations lentes, voire d'équilibres, $\gamma = 1$. Alors, $f'(\rho)$ est en rapport avec la vitesse thermique des particules qui "portent la pression" du plasma, mais on sort ici du cadre strict de la MHD.

9.4.3 Une estimation du paramètre β du plasma en MHD polytropique

Le paramètre $\beta = 2\mu_0 p/B^2$ du plasma mesure le rapport entre la pression cinétique et la pression magnétique du plasma. Ce paramètre permet de dégager les effets dominants. Son intérêt apparaît par exemple dans les équations 9.17 ou 9.21. Dans le cas polytropique, le carré de la vitesse du son est $C_s^2 = f'(\rho) = \gamma p/\rho$, la vitesse d'Alfvén est (polytrope ou non), $V_A^2 = B^2/(2\mu_0\rho)$, d'où

$$\beta = \frac{1}{\gamma}\frac{C_s^2}{V_A^2}. \tag{9.36}$$

Dans le cas plus général des plasmas non polytropiques, la relation approximative

$$\beta \sim \frac{C_s^2}{V_A^2}. \tag{9.37}$$

demeure valable.

9.5 La densité de charge en MHD

Si on calcule la densité de charges électrique pour les solutions MHD de certains problèmes avec l'équation de Poisson, on peut obtenir des valeurs non nulles. Prennons par exemple le cas de l'onde d'Alfven non linéaire montré au paragraphe **??**. La densité de charge vaut $\rho_c = \epsilon_0 \nabla E = -\epsilon_0 B_0 \partial_x v_y$. Comme v_y peut dépendre à la fois de x et de z et que les variations de v_y se propagent selon z, la densité de charge peut être non nulle et variable en fonction du temps à un endroit donné. L'équation du mode d'Alfven linéaire montre aussi une densité de charge non nulle.

Pourtant, l'équation d'Ampère (9.6) implique la nullité de $\nabla \cdot \vec{\mathbf{J}}$. L'équation de conservation de la charge $\partial_t \rho_c + \nabla \cdot \vec{\mathbf{J}} = 0$ implique donc que la densité de charge est une grandeur indépendante du temps en MHD. Ceci contredit la conclusion précédente. Ou est l'erreur ?

L'équation de conservation de la charge électrique $\partial_t \rho_c + \nabla \cdot \vec{\mathbf{J}} = 0$ se déduit de l'équation *complète* d'Ampère en en calculant la divergence. Or, en

MHD, on néglige habituellement le terme $\partial_t \vec{\mathbf{E}}$ qui est précisément celui qui donne $\partial_t \rho_c$ dans l'équation de conservation de la charge. Autrement dit, les équations de Maxwel complètes donnent la conservation de la charge alors que l'approximation de la MHD ne donne que $\nabla \cdot \vec{\mathbf{J}} = 0$. Vouloir appliquer $\partial_t \rho_c + \nabla \cdot \vec{\mathbf{J}} = 0$ à la MHD est faux.

Pourquoi peut-on néanmoins utiliser la MHD ? Les équations de la MHD citées par exemple en section 9.2 résultent d'approximations faites par rapport aux équations complètes de la physique. Ces approximations sont toutes faites au même ordre par rapport aux grandeurs v/c, v_A/c, ω/ω_{pi}. En ce sens, les équations de la MHD forment un ensemble cohérent : on peut les résoudre en étant sûr de ne pas aboutir à des contradictions (du moins tant que les paramètres sans dimension cités ci dessus sont très inférieurs à l'unité). Si on veut adjoindre d'autres équations à celles de la MHD, on prend le risque de comparer des termes qui n'ont pas été calculés au même ordre et d'aboutir à des contradictions.

Mais alors, la densité de charge en MHD, même si elle est non nulle, doit être d'un ordre de grandeur inférieur au courant. On peut le vérifier. Partons de l'équation d'Ampère et de sa divergence. Pour négliger la variation du champ électrique, il faut $1 \gg c^2 \partial_t E/\mu_0 J \sim c^2 \rho_c L/t\epsilon_0 \mu_0 J \sim \rho_c v/J$. Donc, $\rho v \ll J$, ce qui s'exprime aussi par $\delta n/n \ll \delta v/v$ ou δ designe l'ecart entre les grandeurs ioniques et électroniques..

On peut vérifier que l'équation de Poisson donne également, si les condtions de la MHD sont respectées, une séparation de charges très faible. Pour cela, on part de $e(n_i - n_e) = e\delta n = \rho_c = \epsilon_0 \nabla \cdot \vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}}$. En ordres de grandeur : $e\delta n \sim \epsilon_0 v B/L$. Si on se ramène à la variation relative de densités des ions et des électrons : $\delta n/n \sim (v_A/c)(v/c)(c/L\omega_{pi})$ qui doit effectivement être très petit devant 1. D'autre part, l'équation $\rho d\vec{\mathbf{v}}/dt = \vec{\mathbf{J}} \times \vec{\mathbf{B}} + ...$ donne la relation d'ordres de grandeurs $\omega v \sim en\delta v B$ equivalente à $\delta v/v \sim \omega/\omega_{ci}$. C'est aussi un terme petit, mais d'ordre supérieur à $\delta n/n$.

9.6 Les équations de la MHD Hall

La MHD Hall prend en compte la difference de vitesse des ions et des électrons. Celle ci oblige à prendre en compte l'équation de la dynamique des électrons

$$n m_e \frac{d\vec{\mathbf{v}}_e}{dt} = -ne(\vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{v}}_e \times \vec{\mathbf{B}}) - \nabla p_e \tag{9.38}$$

et la définition suivante du courant électrique

$$\vec{\mathbf{J}} = ne(\vec{\mathbf{v}}_i - \vec{\mathbf{v}}_e). \tag{9.39}$$

On suppose en outre que la pression électronique ne dépend que de la densité n. Dans la première équation, le terme de gauche s'annule car on considère que les électrons ont une inertie (m_e) négligeable (hypothèse de base de la MHD). Du coup, la vitesse des ions s'identifie à celle du plasma et $\vec{\mathbf{J}} = ne(\vec{\mathbf{v}} - \vec{\mathbf{v}}_e)$. Comme la pression électronique ne dépend que de n, on peut montrer que $\nabla \times (\nabla p_e/n) = 0$. L'équation (9.4) doit donc être remplacée par

$$\vec{\mathbf{E}} = -\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{J}} \times \vec{\mathbf{B}}/ne - \nabla p_e \tag{9.40}$$

Et l'équation de Faraday $\nabla \times \vec{\mathbf{E}} = -\partial\vec{\mathbf{B}}/\partial t$, devient

$$\partial\vec{\mathbf{B}}/\partial t = \nabla \times (\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}}) - \nabla \times (\frac{\vec{\mathbf{J}}}{ne} \times \vec{\mathbf{B}}). \tag{9.41}$$

Le dernier terme s'apelle le terme de Hall.

Les équations (9.1),(9.3),(9.40),(9.6), (9.7),(9.41), completées par une équation de fermeture (qui relie la pression à la densité) constituent la base de la MHD Hall idéale.

Remarquons qu'en MHD Hall, le théorème du champ gelé ne s'applique plus. En effet, l'équation d'Helmholtz (9.15) devient

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{\mathbf{B}}}{\rho}\right) = \left(\frac{\vec{\mathbf{B}}}{\rho} \cdot \nabla\right)\vec{\mathbf{v}} - \frac{m}{e}\frac{1}{\rho^2}\nabla \times (\vec{\mathbf{J}} \times \vec{\mathbf{B}}). \tag{9.42}$$

Bien que la vitesse des électrons n'apparaisse pas explicitement dans les équations de la MHD Hall, on peut remarquer que l'équation (9.41) s'écrit aussi

$$\partial\vec{\mathbf{B}}/\partial t = \nabla \times (\vec{\mathbf{v}}_e \times \vec{\mathbf{B}}). \tag{9.43}$$

On peut en déduire que le champ magnétique, au lieu d'être gelé dans le flot du plasma, est gelé dans le flot des électrons.

9.7 Les équations de la MHD avec l'équation d'Ampère complète

L'équation d'Ampère s'ecrit

$$\nabla \times \vec{\mathbf{B}} = \mu_0 \vec{\mathbf{J}} + \frac{1}{c^2} \partial \vec{\mathbf{E}} / \partial t. \tag{9.44}$$

Jusqu'à présent, on a négligé le terme $\partial\vec{\mathbf{E}}/\partial t$ dans l'équation d'Ampère, car on a supposé que $(V_a/c)^2 \ll 1$. Supposons que $(V_a/c)^2 \ll 1$, on peut négliger la dérivée du champ électrique si elle est plus petite que le rotationel du champ électrique, c'est à dire si

$$\frac{\partial \vec{\mathbf{E}}/\partial t}{c^2 \nabla \times \vec{\mathbf{B}}} \ll 1.$$

En equation aux dimensions, $\omega LE/(c^2 B) \ll 1$, où ω est la fréquence caractéristique du système, L la longueur caractéristique, et E/B est le rapport des modules des champs électrique et magnétique. Dans les systèmes de la MHD, E/B est de l'ordre de la vitesse d'Alfven V_a, et $\omega L \sim (kV_a)(2\pi/k)$. On a alors $\omega LE/(c^2 B) \sim (V_a/c)^2$. Il faut donc $(V_a/c)^2 \ll 1$. (Pour des phénomènes de plus haute fréquence, en général, E/B est plus grand, ainsi que $\omega L \sim 2\pi\omega/k$).

Dans certaines régions fortement magnétisées, cette condition peut ne pas être satisfaite : $V_a/c = \omega_{ci}/\omega_{pi} = \omega_{ce}/\omega_{pe}\sqrt{m_e/m_i}$. (Dans un plasma composé d'électrons et de protons, $V_a/c = (1/42)(\omega_{ce}/\omega_{pe})$).

9.8 Les équations de la MHD résistive

Ce sont les mêmes relations que pour la MHD idéale (section 9.2), sauf la loi d'Ohm où la résistivité n'est pas nulle.

$$\vec{\mathbf{J}} = \sigma \vec{\mathbf{E}'} = \sigma(\vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}}) \tag{9.45}$$

où $\vec{\mathbf{E}}$ est le champ électrique dans le repère du laboratoire, le champ $\vec{\mathbf{E}'}$ est le champ electrique dans le repère du plasma qui est lié à $\vec{\mathbf{E}}$ par la transformation de Lorentz $\vec{\mathbf{E}'} = \vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}}$. La résistivité du plasma est l'inverse de la conductivité σ. Dans le cas présent, σ est une grandeur finie, alors que $\sigma \sim \infty$ pour un plasma idéal.

La résistivité du plasma est généralement due à des collisions entre les particules du plasma. Dans ce cas, sa définition ne pose pas de problème. Dans le cas des plasmas non collisionnels, on invoque souvent une résistivité anormale qui serait causée par des phénomènes de turbulence à petite échelle non pris en compte par la théorie MHD. Autrement dit, on invoque ce qui n'est pas dans la MHD pour introduire un terme ad hoc, qui comme par hasard, résoud beaucoup de difficultés. Le problème, c'est que les efforts entrepris avec des théories plus élaborées (la théorie cinétique en particulier) pour montrer qu'il existe une résistivité anormale se sont en général soldés par des échecs. Donc, il faut se méfier des résistivités ad hoc qui appraissent dans certains modèles MHD, ils en altèrent souvent la validité.

En MHD résistive, l'équation de Faray n'est plus 9.5 mais

$$\partial\vec{\mathbf{B}}/\partial t = \nabla \times (\frac{\vec{\mathbf{J}}}{\sigma} + \vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}}). \tag{9.46}$$

L'équation d'ampère 9.6 demeure valable.

On peut montrer que la résistivité non nulle du plasma entraîne de la diffusion du champ magnétique. En effet, l'équation 9.14 devient, en ayant pris en compte 9.46 et en éliminant le courant électrique avec l'équation d'Ampère,

$$\frac{d\vec{\mathbf{B}}}{dt} = -\frac{1}{\mu_0\sigma}\nabla \times (\nabla \times \vec{\mathbf{B}}) - \vec{\mathbf{B}}(\nabla \cdot \vec{\mathbf{v}}) + (\vec{\mathbf{B}} \cdot \nabla)\vec{\mathbf{v}}. \tag{9.47}$$

Le terme $1/\mu_0\sigma$ est appelé "diffusivité magnétique". Le premier terme du membre de droite combiné au membre de gauche forment une équation typique pour la diffusion du champ magnétique. Si on a un gradient de champ magnétique assez raide, il va (en negligeant les autres termes) s'étendre sur une région dont la taille x augmentera comme $\Delta x \sim \sqrt{\Delta t/\mu_0\sigma}$. On vérifie que pour une résistivité infinie, Δx est nul, le gradient est préservé.

Chapitre 10

Plasmas froids

10.1 Les équations classiques des plasmas froids

Essai d'un tenseur $\vec{\vec{\sigma}}$ et $\vec{\vec{\boldsymbol{\Sigma}}}$ Un plasma froid est considéré comme un ensemble de fluides correspondant à différentes espèces s. Les équations du plasma définissent l'évolution des premiers moments n_s et $\vec{\mathbf{v}}_s$ de la fonction de distribution associé à chaque espèce. Ces équations sont couplées via les termes sources (densités de charge et de courant) dans les équations de Maxwell.

Dans le cas d'un plasma froid, la fermeture des équations sur les moments correspond à l'approximation d'une température nulle, ce qui annule la pression. Les équations du plasma froid sont donc les équations de continuité et de transport.

L'équation de continuité s'écrit pour chaque espèce s :

$$\frac{\partial n_s}{\partial t} + \nabla \cdot (n_s \vec{\mathbf{v}}_s) = 0 \tag{10.1}$$

ou encore

$$\frac{dn_s}{dt} + n_s \nabla \cdot \vec{\mathbf{v}}_s = 0. \tag{10.2}$$

La notation n_s représente la densité en nombre de particules de l'espèce s ; et $\vec{\mathbf{v}}_s$ est la vitesse moyenne, qui coincide pour un plasma froid avec la vitesse de chaque particule. Puisque la température est nulle, on ne s'intéresse pas au moment suivant qui est nul (variance de la distribution de vitesse), et la pression cinétique, qui est nulle. L'équation de transport s'écrit

$$n_s m_s d\vec{\mathbf{v}}_s/dt = n_s e_s(\vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{v}}_s \times \vec{\mathbf{B}}). \tag{10.3}$$

La densité de charge portée par les particules s est

$$\rho_s = n_s e_s \tag{10.4}$$

et la densité totale de charges est

$$\rho = \sum_s n_s e_s = \sum_s \rho_s \tag{10.5}$$

(attention, en MHD, ρ représente la densité massique du fluide, la densité de charge est représentée par ρ_e). La densité de courant transportée par les particules s est

$$\vec{\mathbf{J}}_s = n_s e_s \vec{\mathbf{v}}_s \tag{10.6}$$

et la densité totale de courant est

$$\vec{\mathbf{J}} = \sum_s n_s e_s \vec{\mathbf{v}}_s = \sum_s \vec{\mathbf{J}}_s \tag{10.7}$$

Les équations (10.1),(10.3) pour chaque espèce, et (3.33), (3.32), (3.34), (3.35), (10.5), et (10.7) pour l'ensemble du plasma constituent les équations des plasmas froids.

10.1.1 Dispersion linéaire dans les plasmas froids homogènes

On considère le cas simple d'un plasma froid homogène, où à l'équilibre, les densités n_{s0} et les vitesses $\vec{\mathbf{v}}_{s0}$ sont uniformes, la vitesse est parallèle au champ magnétique. Puisque le plasma est homogène, on peut considérer un système périodique et traiter sa transformée de Fourier en espace (vecteur d'onde $\vec{\mathbf{k}}$) et en temps (pulsation ω). On peut calculer une équation linéaire de dispersion des ondes en combinant la relation de dispersion 5.22 avec le calcul de la constante diélectrique $\vec{\vec{\epsilon}}$ des plasmas froids. Le calcul de $\vec{\vec{\epsilon}}$ se fait à partir de l'ensemble des équations des plasmas froids linéarisées autour des valeurs correspondant à l'état d'équilibre. On emploie l'équation de continuité linéarisée :

$$\frac{dn_{s1}}{dt} + \vec{\mathbf{v}}_{s0} \nabla \cdot n_{s1} + n_{s0} \nabla \cdot \vec{\mathbf{v}}_{s1} = 0. \tag{10.8}$$

et l'équation de transport linéarisée :

$$n_{s0} m_s d\vec{\mathbf{v}}_{s1}/dt = n_{s0} e_s (\vec{\mathbf{E}}_1 + \vec{\mathbf{v}}_{s0} \times \vec{\mathbf{B}}_1 + \vec{\mathbf{v}}_{s1} \times \vec{\mathbf{B}}_0). \tag{10.9}$$

Après transformation de Fourier, les équations de transport deviennent $(\omega - \vec{\mathbf{k}} \cdot \vec{\mathbf{v}}_{s0})n_{s1} = n_{s0}\vec{\mathbf{k}} \cdot \vec{\mathbf{v}}_{s1}$ et $-i\omega m_s \vec{\mathbf{v}}_{s1} = e_s(\vec{\mathbf{E}}_1 + \vec{\mathbf{v}}_{s0} \times \vec{\mathbf{B}}_1 + \vec{\mathbf{v}}_{s1} \times \vec{\mathbf{B}}_0)$. On calcule la transformée de Fourier de la conductivité électrique $\vec{\vec{\sigma}}$ à partir de la relation 5.6. La densité de courant portée par l'espèce s se déduit des équations de transports ci dessus, de la définition 10.6, et de l'équation de Faraday 5.8. On obtient une équation portant sur la vitesse

$$\vec{\mathbf{v}}_{s1} = \frac{ie_s}{\omega m_s}(\vec{\mathbf{E}}_1 + \frac{1}{\omega}\vec{\mathbf{v}}_{s0} \times (\vec{\mathbf{k}} \times \vec{\mathbf{E}}_1)) + \vec{\mathbf{v}}_{s1} \times (\frac{ie_s}{\omega m_s}\vec{\mathbf{B}}_0). \tag{10.10}$$

Pour la suite des calculs, on définit la fréquence cyclotronique (ou girofréquence -latin- ou gyrofréquence -grec-) $\vec{\omega}_{cs}$ et la fréquence plasma $\vec{\omega}_{ps}$ associée à chaque espèce s :

$$\vec{\omega}_{cs} = \frac{e_s\vec{\mathbf{B}}_0}{m_s} \quad \omega_{ps}^2 = \tfrac{n_{s0}e_s^2}{\epsilon_0 m_s} \tag{10.11}$$

ATTENTION : Certains auteurs (Quémada par exemple) habitués sans doute à traiter des ondes électroniques de haute fréquence préfèrent avoir une girofréquence électronique positive et définissent donc $\vec{\omega}_{cs} = -e_s\vec{\mathbf{B}}_0/m_s$ avec un signe opposé au nôtre. Il va sans dire que de tels agissements sont le signe d'un grand désordre de l'esprit et que nous nous garderons bien d'opérer de la sorte. D'un point de vue pratique, il faut se rappeller lorsque l'on compare les relations ci-présentes aux leurs, il faut inverser le signe des girofréquences.

L'équation 10.10 se résoud en

$$\vec{\mathbf{v}}_{s1} = \frac{ie_s}{\omega m_s}\frac{1}{1-(\vec{\omega}_{cs}/\omega)^2}\left(\vec{\vec{\mathbf{I}}} - i\frac{\vec{\omega}_{cs}}{\omega} \times -\frac{\vec{\omega}_{cs}}{\omega}\frac{\vec{\omega}_{cs}}{\omega}\right) \cdot \left(\vec{\mathbf{E}}_1 + \frac{1}{\omega}\vec{\mathbf{v}}_{s0} \times (\vec{\mathbf{k}} \times \vec{\mathbf{E}}_1)\right) \tag{10.12}$$

où $\vec{\vec{\mathbf{I}}}$ est le tenseur unité, et $\vec{\omega}_{cs}\vec{\omega}_{cs}$ est le carré dyadique (un tenseur) de $\vec{\omega}_{cs}$. L'équation 10.12 s'écrit sous forme de produit de matrice

$$\vec{\mathbf{v}}_{s1} = \frac{i\epsilon_0\omega}{e_s n_{s0}}\vec{\vec{\mathbf{M}}}\vec{\vec{\mathbf{N}}} \cdot \vec{\mathbf{E}} \tag{10.13}$$

où $\vec{\vec{\mathbf{M}}}$ et $\vec{\vec{\mathbf{N}}}$ sont les tenseurs définis par

$$\vec{\vec{\mathbf{M}}} = \begin{pmatrix} \frac{\omega_{sp}^2}{(\omega^2-\omega_{sc}^2)} & i\frac{\omega_{sp}^2\omega_{sc}}{\omega(\omega^2-\omega_{sc}^2)} & 0 \\ -i\frac{\omega_{sp}^2\omega_{sc}}{\omega(\omega^2-\omega_{sc}^2)} & \frac{\omega_{sp}^2}{(\omega^2-\omega_{sc}^2)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\omega_{sp}^2}{\omega^2} \end{pmatrix} \tag{10.14}$$

$$\vec{\vec{\mathbf{N}}} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{v_{s0}k_z}{\omega} & 0 & \frac{v_{s0}k_x}{\omega} \\ 0 & 1 - \frac{v_{s0}k_z}{\omega} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{10.15}$$

Cette relation sera utile par la suite, pour calculer la polarisation des ondes. Le tenseur $\vec{\vec{\mathbf{N}}}$ se réduit au tenseur identité quand les vitesses $\vec{\mathbf{v}}_{s0}$ sont nulles. On en déduit la densité de courant (10.7) linéarisée $\vec{\mathbf{J}} = \sum n_{s0} e_s \vec{\mathbf{v}}_{s1}$, puis la conductivité (5.6) et le tenseur diélectrique (5.21) :

$$\vec{\vec{\epsilon}} = \epsilon_0 \left\{ \vec{\vec{\mathbf{I}}} - \sum_s \frac{\omega_{sp}^2}{\omega^2 - \omega_{sc}^2} \left(\vec{\vec{\mathbf{I}}} - i \frac{\vec{\omega}_{cs}}{\omega} \times - \frac{\vec{\omega}_{cs}}{\omega} \frac{\vec{\omega}_{cs}}{\omega} \right) \cdot \left(\left(1 - \frac{\vec{\mathbf{k}} \cdot \vec{\mathbf{v}}_{s0}}{\omega} \right) \vec{\vec{\mathbf{I}}} + \frac{\vec{\mathbf{k}} \vec{\mathbf{v}}_{s0}}{\omega} \right) \right\} \tag{10.16}$$

Ce tenseur s'écrit comme la somme du tenseur identité, et du produit de deux tenseurs assez simples, de façon analogue à 10.13. Le second de ces tenseurs se réduit au tenseur identité quand les vitesses $\vec{\mathbf{v}}_{s0}$ sont nulles. On peut effectuer ce calcul. Comme les vitesses dirigées $\vec{\mathbf{v}}_{s0}$ sont parallèlles à $\vec{\mathbf{B}}_0$, le produit scalaire $\vec{\mathbf{k}} \cdot \vec{\mathbf{v}}_{s0}$ vaut $k_z v_{s0}$, ce qui permet d'éliminer quelques termes. Le tenseur diélectrique est

$$\epsilon_0 \begin{pmatrix} 1 - \sum_s \frac{\omega_{sp}^2(\omega - \vec{k}\cdot\vec{v}_{s0})}{\omega(\omega^2 - \omega_{sc}^2)} & -i \sum_s \frac{\omega_{sp}^2 \omega_{sc}(\omega - \vec{k}\cdot\vec{v}_{s0})}{\omega^2(\omega^2 - \omega_{sc}^2)} & 0 \\ +i \sum_s \frac{\omega_{sp}^2 \omega_{sc}(\omega - \vec{k}\cdot\vec{v}_{s0})}{\omega^2(\omega^2 - \omega_{sc}^2)} & 1 - \sum_s \frac{\omega_{sp}^2(\omega - \vec{k}\cdot\vec{v}_{s0})}{\omega(\omega^2 - \omega_{sc}^2)} & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \sum_s \frac{\omega_{sp}^2}{\omega^2} \end{pmatrix} \tag{10.17}$$

$$\epsilon = \epsilon_0 \begin{pmatrix} \kappa_{11} & -i\kappa_{12} & 0 \\ i\kappa_{12} & \kappa_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_{33} \end{pmatrix} \tag{10.18}$$

$$\kappa_{11} = \kappa_{22} = 1 - \sum_s \frac{\omega_{sp}^2(\omega - \vec{k} \cdot \vec{v}_{s0})}{\omega(\omega^2 - \omega_{sc}^2)} \tag{10.19}$$

$$\kappa_{12} = -\kappa_{21} = + \sum_s \frac{\omega_{sp}^2 \omega_{sc}(\omega - \vec{k} \cdot \vec{v}_{s0})}{\omega^2(\omega^2 - \omega_{sc}^2)}$$

$$\kappa_{33} = 1 - \sum_s \frac{\omega_{sp}^2}{\omega^2}$$

Remarque : Les auteurs qui, à l'instar de Quémada définissent la girofréquence avec un signe moins devant la charge trouvent un signe opposé pour

κ_{12}. Pour trouver comme eux, il suffit de changer les signes des ω_{sc}. Voir la mise en garde énnoncée un peu plus haut dans ces pages. Connaissant maintenant le tenseur diélectrique, on peut calculer l'équation de dispersion des plasma froids homogènes à partir de la relation 5.22, ou sa version matricielle 5.23, 5.25 écrite en projettant $\vec{\mathbf{B}}_0$ et $\vec{\mathbf{k}}$ sur les axes x et z. L'équation de dispersion consiste en la nullité du déterminant suivant

$$\begin{vmatrix} \omega^2\kappa_{11}/c^2 - k_\parallel^2 & -i\omega^2\kappa_{12}/c^2 & k_\perp k_\parallel \\ i\omega^2\kappa_{12}/c^2 & \omega^2\kappa_{11}/c^2 - k^2 & 0 \\ k_\perp k_\parallel & 0 & \omega^2\kappa_{33}/c^2 - k_\perp^2 \end{vmatrix} = 0 \tag{10.20}$$

Cette équation est la plus générale pour les plasmas froids homogènes.

10.1.2 Cas particulier de la propagation parallèle

Dans le cas où $k = k_\parallel$, le système 10.20 se découple en équations indépendantes

$$\kappa_{33} = 0 \tag{10.21}$$

$$\kappa_{11} + s\kappa_{12} = \frac{k^2c^2}{\omega^2}, \tag{10.22}$$

où $s = \pm 1$. Le premier cas correspond aux ondes ordinaires en propagation parallèle, dont l'equation de dispersion est $\omega^2 = \omega_p^2$. On les appelle aussi des ondes de plasma. Le second cas mène à l'équation de dispersion

$$\frac{k^2c^2}{\omega^2} = 1 - \sum_s \frac{\omega_{sp}^2(\omega - kv_{s0})}{\omega^2(\omega - s\omega_{sc})}. \tag{10.23}$$

D'après 5.23 et 10.20 qui est un cas particulier de 5.24, ce cas nécessite $E_z = 0$, c'est à dire $E_\parallel = 0$. Donc $\vec{\mathbf{k}} \cdot \vec{\mathbf{E}}_1 = 0$. De l'équation de Faraday 5.8, et de la nullité du produit mixte quand un vecteur s'y retrouve deux fois, on déduit $\vec{\mathbf{E}}_1 \cdot \vec{\mathbf{B}}_1 = 0$; les perturbations de champ électrique et magnétique sont orthogonales. La relation 10.12 donnant la vitesse se simplifie puisque le terme $\omega_{sc}\omega_{sc}.\vec{\mathbf{E}}_1$ s'y annule. On peut déduire de 10.23 une équation polynomiale. Dans le cas d'un plasma avec une seule espèce d'ions, et pas de vitesse de dérive , la relation de dispersion se déduit de l'équation polynomiale suivante :

$$\omega^4 - s\omega^3(\omega_{ce} + \omega_{ci}) + \omega^2[\omega_{ce}\omega_{ci} - k^2c^2 - (\omega_{pe}^2 + \omega_{pi}^2)] \tag{10.24}$$

$$+s\omega[(\omega_{ce} + \omega_{ci})k^2c^2 + \omega_{pe}^2\omega_{ci} + \omega_{pi}^2\omega_{ce}] - k^2c^2\omega_{ce}\omega_{ci} = 0. \tag{10.25}$$

Il faut garder à l'esprit que ω_{ce} est négatif. On écrit souvent, dans le cas d'oscillations de haute fréquence (on néglige les fréquences ioniques),

$$\frac{k^2c^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega(\omega \pm \omega_{ce})}. \tag{10.26}$$

Le cas avec un "+" (avec $\omega_{ce} < 0$) correspond à un mode de polarisation droite, appellé le mode droit. Le cas avec un "-" correspond au mode gauche. Les fréquences de coupure (k tend vers l'infini) sont

$$\omega_G = \frac{1}{2}(+\omega_{ce} + \sqrt{\omega_{ce}^2 + 4\omega_{pe}^2}) \tag{10.27}$$
$$= \frac{1}{2}(-|\omega_{ce}| + \sqrt{\omega_{ce}^2 + 4\omega_{pe}^2}), \tag{10.28}$$
$$\omega_D = \frac{1}{2}(-\omega_{ce} + \sqrt{\omega_{ce}^2 + 4\omega_{pe}^2}). \tag{10.29}$$

On constate également que l'onde droite entre en résonnance avec la gyrofréquence des électrons pour $\omega = \omega_{ce}$. Un calcul prennant en compte les ions (Eq. (10.23) exploitable aux fréquences plus basses) montre que l'onde gauche a une résonance avec la gyrofréquence des ions.

10.1.3 Cas particulier de la propagation perpendiculaire : ondes ordinaires et extraordinaires

La nullité du déterminant mène aux équations

$$\frac{k^2c^2}{\omega^2} = \kappa_{33} \tag{10.30}$$

ou

$$\kappa_{11}(\kappa_{22} - \frac{k^2c^2}{\omega^2}) + \kappa_{12}^2 = 0. \tag{10.31}$$

La première équation est la relation de dispersion des ondes ordinaires. Quel que soit le nombre d'espèces dans le plasma, on peut l'écrire simplement sous la forme

$$\omega^2 = \omega_p^2 + k^2c^2 \tag{10.32}$$

en posant $\omega_p = \sum_s \omega_{ps}$. Cette onde ne se propage pas en dessous de la fréquence plasma ω_p. Pour $\omega >> \omega_p$, elle coïncide avec l'onde de lumière (le champ électromagnétique vibre trop vite par rapport à l'inertie des particules, elle passe donc à travers le plasma sans interagir avec lui).

La seconde équation est longue à résoudre dans le cas où l'on considère plusieurs populations :

$$(1-\sum_s \frac{\omega_{sp}^2}{(\omega^2-\omega_{sc}^2)})(1-\sum_s \frac{\omega_{sp}^2}{(\omega^2-\omega_{sc}^2)}-\frac{k^2c^2}{\omega^2})-(\sum_s \frac{\omega_{sp}^2\omega_{sc}(\omega-\vec{k}\cdot\vec{v}_{s0})}{\omega^2(\omega^2-\omega_{sc}^2)})^2=0.$$

Si on ne s'intéresse qu'aux hautes fréquences, en ne gardant que les électrons, la fréquence hybride haute définie par

$$\omega_{uh}^2=\omega_{pe}^2+\omega_{ce}^2 \tag{10.33}$$

ressort assez naturellement et, après un peu d'algèbre,

$$\frac{k^2c^2}{\omega^2}=1-\frac{\omega_{pe}^2(\omega^2-\omega_{pe}^2)}{\omega^2(\omega^2-\omega_{uh}^2)}. \tag{10.34}$$

C'est l'équation de dispersion de l'onde extraordinaire. Elle a une résonnance à la fréquence hybride haute : la gyrofréquence des électrons coïncide alors avec la fréquence plasma, et il y a conversion d'énergie entre la partie électromagnétique de l'onde et les oscillations électrostatiques du plasma (non propagatives). Pour $\omega >> \omega_p$, on retrouve, comme dans le cas de l'onde ordinaire, la propagation des ondes de lumière. La seule prise en compte des électrons semble montrer que l'onde extraordinaire ne se propage pas pour ...

10.2 Ondes dans un plasma froid au repos

Il s'agit du cas où v_{s0} est nul pour chaque espèce s. L'équation 10.20 ne change pas, mais les coefficients κ sont plus simples :

$$\begin{aligned}\kappa_{11}=\kappa_{22}=1-\sum_s \frac{\omega_{sp}^2}{(\omega^2-\omega_{sc}^2)} \\ \kappa_{12}=-\kappa_{21}=+\sum_s \frac{\omega_{sp}^2\omega_{sc}}{\omega(\omega^2-\omega_{sc}^2)} \\ \kappa_{33}=1-\sum_s \frac{\omega_{sp}^2}{\omega^2}\end{aligned} \tag{10.35}$$

10.2.1 Ondes dans un plasma froid au repos, repère tournant

En général, le déterminant est assez compliqué et il peut être pratique de travailler dans une base où la matrice $\vec{\vec{\epsilon}}$ est diagonale. On se place toujours dans le cas où le champ magnetique extérieur $\vec{\mathbf{B}}_0$ est le long de l'axe Oz. A chaque vecteur $\vec{\mathbf{a}}$ on associe un vecteur $\bar{\mathbf{a}} = \vec{\vec{\mathbf{V}}} \cdot \vec{\mathbf{a}}$ oú la matrice $\vec{\vec{\mathbf{V}}}$ et son inverse $\vec{\vec{\mathbf{U}}}$ sont définies par

$$\vec{\vec{\mathbf{V}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ 1 & -i & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \quad , \vec{\vec{\mathbf{U}}} = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -i & i & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \tag{10.36}$$

On note $\bar{\mathbf{a}} = (a_+, a_-, a_z)$ les composantes d'un vecteur dans ce nouveau repère, on appelle ce système de composantes les coordonnées tournantes. Les tenseurs se transforment suivant $\vec{\vec{\mathbf{M}}} = \vec{\vec{\mathbf{U}}} \cdot \bar{\bar{\mathbf{M}}} \cdot \vec{\vec{\mathbf{V}}}$. Le tenseur $\vec{\vec{\epsilon}}$ se transforme en

$$\bar{\bar{\epsilon}} = \begin{pmatrix} \bar{\epsilon}_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\epsilon}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\epsilon}_{33} \end{pmatrix} \tag{10.37}$$

les termes diagonaux sont

$$\bar{\epsilon}_{11} = 1 + \frac{{\omega_{ep}}^2}{\omega\ (-\omega + \omega_{ec})} - \frac{{\omega_{ip}}^2}{\omega\ (\omega + \omega_{ic})} \tag{10.38}$$

$$\bar{\epsilon}_{22} = 1 - \frac{{\omega_{ep}}^2}{\omega\ (\omega + \omega_{ec})} + \frac{{\omega_{ip}}^2}{\omega\ (-\omega + \omega_{ic})} \tag{10.39}$$

$$\bar{\epsilon}_{33} = 1 - \frac{{\omega_{ep}}^2}{\omega^2} - \frac{{\omega_{ip}}^2}{\omega^2} \tag{10.40}$$

L'équation de dispersion des plasmas froids au repos devient alors

$$\bar{\mathbf{k}} \times (\vec{\vec{\mathbf{U}}} \cdot \bar{\mathbf{k}} \times \vec{\vec{\mathbf{U}}} \cdot \bar{\mathbf{E}}) + \frac{\omega^2}{c^2 \epsilon_0} \bar{\bar{\epsilon}} \bar{\mathbf{E}} = 0 \tag{10.41}$$

L'opérateur de gauche s'exprime de la façon suivante en fonction des coordonnées tournantes de $\bar{\mathbf{k}}$

$$\begin{pmatrix} -i\,{k_-}^2 - \frac{{k_z}^2}{\sqrt{2}} & i\,k_-\,k_+ - \frac{{k_z}^2}{\sqrt{2}} & \frac{k_-\,k_z}{\sqrt{2}} + \frac{k_+\,k_z}{\sqrt{2}} \\ i\,k_-\,k_+ + \frac{i\,{k_z}^2}{\sqrt{2}} & -i\,{k_+}^2 - \frac{i\,{k_z}^2}{\sqrt{2}} & -i\,{k_+}^2 - \frac{i\,{k_z}^2}{\sqrt{2}}, \frac{i\,k_-\,k_z}{\sqrt{2}} - \frac{i\,k_+\,k_z}{\sqrt{2}} \\ \frac{-i\,k_-\,k_z}{\sqrt{2}} + \frac{k_+\,k_z}{\sqrt{2}} & \frac{i\,k_-\,k_z}{\sqrt{2}} + \frac{k_+\,k_z}{\sqrt{2}} & \frac{-i\,{k_-}^2}{\sqrt{2}} + \left(-\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right)\sqrt{2}\,k_-\,k_+ - \frac{{k_+}^2}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \tag{10.42}$$

En mélangeant les composantes tournantes et cartésiennes ordinaires du vecteur d'onde, on obtient la relation de dispersion suivante, plus simple :

$$\bar{\mathbf{k}} \times (\vec{\mathbf{k}} \times \vec{\vec{\mathbf{U}}} \cdot \bar{\mathbf{E}}) + \frac{\omega^2}{c^2 \epsilon_0} \bar{\bar{\epsilon}} \bar{\mathbf{E}} = 0 \tag{10.43}$$

L'opérateur de gauche s'écrit

$$\begin{pmatrix} \frac{-i\,k_-\,k_\perp}{\sqrt{2}} - \frac{{k_z}^2}{\sqrt{2}} & \frac{i\,k_-\,k_\perp}{\sqrt{2}} - \frac{{k_z}^2}{\sqrt{2}} & k_\perp\,k_z \\ \frac{i\,k_+\,k_\perp}{\sqrt{2}} + \frac{i\,{k_z}^2}{\sqrt{2}} & \frac{-i\,k_+\,k_\perp}{\sqrt{2}} - \frac{i\,{k_z}^2}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{-i\,k_-\,k_z}{\sqrt{2}} + \frac{k_+\,k_z}{\sqrt{2}} & \frac{i\,k_-\,k_z}{\sqrt{2}} + \frac{k_+\,k_z}{\sqrt{2}} & k_+\,k_\perp \end{pmatrix} \tag{10.44}$$

Chapitre 11

Approche multi-fluide, adiabatique

11.1 Les equations de la théorie fluide des plasmas adiabatiques

On considère comme adiabatique un plasma dans lequel onpeut négliger le tenseur de flux de chaleur $\vec{\vec{\mathbf{q}}}$ défini au chapitre 8. Les équations fluides sont démontrées au chapitre 8, on les réécrit ici, pour mémoire, car elles fondent le présent chapitre. Conservation du nombre de particules, sous forme Eulérienne,

$$\frac{\partial n_s}{\partial t} + \nabla \cdot (n_s \vec{\mathbf{v}}_s) = 0 \tag{11.1}$$

ou encore, sous forme Lagrangienne

$$\frac{dn_s}{dt} + n_s \nabla \cdot \vec{\mathbf{v}}_s = 0. \tag{11.2}$$

Conservation de la quantité de mouvement

$$m_s n_s \frac{\partial \vec{\mathbf{v}}_s}{\partial t} + n_s m_s \vec{\mathbf{v}}_s \cdot \nabla \vec{\mathbf{v}}_s + \nabla \cdot \vec{\vec{\mathbf{p}}}_s - q_s n_s (\vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{v}}_s \times \vec{\mathbf{B}}) = 0; \tag{11.3}$$

sous forme Lagrangienne,

$$n_s m_s \frac{d\vec{\mathbf{v}}_\mathbf{s}}{dt} + \nabla \cdot \vec{\vec{\mathbf{p}}}_s - q_s n_s (\vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{v}}_s \times \vec{\mathbf{B}}) = 0. \tag{11.4}$$

Transport du tenseur de pression, sous forme Eulérienne,

$$\frac{\partial \vec{\vec{\mathbf{p}}}_s}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{\mathbf{v}}_s \vec{\vec{\mathbf{p}}}_s + \vec{\vec{\vec{\mathbf{Q}}}}_s) + [\vec{\vec{\mathbf{p}}}_s \cdot \nabla \vec{\mathbf{v}}_s + \omega_{cs} \times \vec{\vec{\mathbf{p}}}_s] + [\vec{\vec{\mathbf{p}}}_s \cdot \nabla \vec{\mathbf{v}}_s + \omega_{cs} \times \vec{\vec{\mathbf{p}}}_s]^t = 0 \quad (11.5)$$

où l'exposant t indique la transposition ; et sous forme Lagrangienne,

$$n \frac{d}{dt} \frac{\vec{\vec{\mathbf{p}}}_s}{n} + \nabla \cdot \vec{\vec{\vec{\mathbf{Q}}}}_s + [\vec{\vec{\mathbf{p}}}_s \cdot \nabla \vec{\mathbf{v}}_s + \omega_{cs} \times \vec{\vec{\mathbf{p}}}_s] + [\vec{\vec{\mathbf{p}}}_s \cdot \nabla \vec{\mathbf{v}}_s + \omega_{cs} \times \vec{\vec{\mathbf{p}}}_s]^t = 0. \quad (11.6)$$

Le produit $\vec{\mathbf{v}}_s \vec{\vec{\mathbf{p}}}_s$ est un tenseur d'ordre 3 défini simplement par $(\vec{\mathbf{v}}\vec{\vec{\mathbf{p}}})_{ijk} = v_i p_{jk}$. Le produit $\omega_c \times \vec{\vec{\mathbf{p}}}$ est un tenseur dont la première colonne est le produit vectoriel de ω_c et de la première colonne de $\vec{\vec{\mathbf{p}}}$, et ainsi de suite pour les deux autres colonnes. La divergence d'un tenseur est la somme des dérivées portant sur le premier indice. Par exemple, la divergence du tenseur $\vec{\vec{\vec{\mathbf{Q}}}}$ d'ordre 3, $\nabla \cdot \vec{\vec{\vec{\mathbf{Q}}}}$, est un tenseur d'ordre deux et $(\nabla \cdot \vec{\vec{\vec{\mathbf{Q}}}})_{ij} = \sum_k \partial_k Q_{kij}$. Ici, on suppose $\vec{\vec{\vec{\mathbf{Q}}}} = \vec{\vec{\vec{\mathbf{0}}}}$.

Ces équations sont complétées par les équations de Maxwell.

11.2 Equation de fermeture de Chew-Goldberger-Low

On considère un plasma soumis à des phénomènes de basse fréquence, dont la vitesse moyenne est non pas donnée par 11.3 ou 11.4, mais résolue sous la forme

$$\vec{\mathbf{v}}_s = \vec{\mathbf{u}}_0 = \frac{\vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{B}}}{B^2}. \quad (11.7)$$

Cette expression est, en négligeant les phénomènes de haute fréquence (du genre oscillations à ω_{pe}) une solution correcte au premier ordre (d'où l'indice 0 de u_0). Cela peut se déduire, par exemple, en considérant les équations du mouvement des centre guide au chapitre 7. On suppose en outre que la distribution des vitesses des particules est gyrotrope. La relation

$$\vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{u}}_0 \times \vec{\mathbf{B}} = 0 \quad (11.8)$$

permet d'éliminer le champ électrique des équations. Projettons localement le champ magnétique $(0, 0, B)$ sur l'axe z. La définition du tenseur de pression, donnée dans le tableau 8.3 se simplifie considérablement. On peut l'écrire

$$\vec{\vec{\mathbf{p}}}_0 = \int \begin{pmatrix} (w_x - u_{0x})^2 & (w_x - u_{0x})(w_y - u_{0y}) & (w_x - u_{0x})w_z \\ (w_x - u_{0x})(w_y - u_{0y}) & (w_y - u_{0y})^2 & (w_y - u_{0y})w_z \\ (w_x - u_{0x})w_z & (w_y - u_{0y})w_z & w_z^2 \end{pmatrix} f(\vec{\mathbf{w}})d\vec{\mathbf{w}}. \tag{11.9}$$

De par la gyrotropie de f, les composantes hors diagonale s'annulent, et les composantes p_{xx} et p_{yy} sont égales. Le tenseur de pression se simplifie donc sous la forme

$$\vec{\mathbf{p}}_0 = \begin{pmatrix} p_\perp & 0 & 0 \\ 0 & p_\perp & 0 \\ 0 & 0 & p_\parallel \end{pmatrix} = p_\parallel \vec{\mathbf{b}}\vec{\mathbf{b}} + p_\perp(\vec{\vec{\mathbf{I}}} - \vec{\mathbf{b}}\vec{\mathbf{b}}), \tag{11.10}$$

où $p_\parallel$ et $p_\perp$ sont deux scalaires représentant la pression dans la direction parallèle et perpendiculaire et $\vec{\mathbf{b}} = \vec{\mathbf{B}}/B$. Pour que le système des équations soit complet, il faut une fermeture. Ici, la fermeture repose sur l'hypothèse d'adiabaticité. Il est possible de trouver deux relations simples entre $p_\parallel$, $p_\perp$ et d'autres grandeurs simples du plasma qui évite un recours (une fois cette relation obtenue) à l'équation du transport de la pression. Ce sont les relations de Chew, Goldberger et Low (CGL). Les voici :

$$\frac{d}{dt}(\frac{p_\parallel B^2}{n^3}) \tag{11.11}$$

$$\frac{d}{dt}(\frac{p_\perp}{nB}). \tag{11.12}$$

Comme il existe des composantes de la vitesse à l'ordre 1, il faut être conscient que cette relation n'est vraie qu'à l'ordre 0, d'où l'indice associé au tenseur de pression.

La suite de ce paragraphe indique comment trouver ces deux relations. On considère l'equation 8.31, qu'on rappelle ici pour mémoire

$$n\frac{d}{dt}\frac{\vec{\vec{\mathbf{p}}}}{n} + \nabla\cdot\vec{\vec{\vec{\mathbf{Q}}}} + [\vec{\vec{\mathbf{p}}} \cdot \nabla\vec{\mathbf{v}} + \omega_c \times \vec{\vec{\mathbf{p}}}] + [\vec{\vec{\mathbf{p}}} \cdot \nabla\vec{\mathbf{v}} + \omega_c \times \vec{\vec{\mathbf{p}}}]^t = 0. \tag{11.13}$$

Ici, par hypothèse, $\nabla\cdot\vec{\vec{\vec{\mathbf{Q}}}} = 0$. Un rapide calcul montre que $(\omega_c \times \vec{\vec{\mathbf{p}}}) + (\omega_c \times \vec{\vec{\mathbf{p}}})^t$ est nul. On pose $\vec{\vec{\mathbf{H}}} = \vec{\vec{\mathbf{p}}}/nB^2$, alors

$$\vec{\vec{\mathbf{H}}} = H_\parallel \vec{\mathbf{B}}\vec{\mathbf{B}} + H_\perp(B^2\vec{\vec{\mathbf{I}}} - \vec{\mathbf{B}}\vec{\mathbf{B}}), \tag{11.14}$$

l'équation de transport devient

$$\frac{d}{dt}H_\|\vec{\mathbf{B}}\vec{\mathbf{B}} + H_\perp(B^2\vec{\vec{\mathbf{I}}} - \vec{\mathbf{B}}\vec{\mathbf{B}}) + [(H_\|\vec{\mathbf{B}}\vec{\mathbf{B}} + H_\perp(B^2\vec{\vec{\mathbf{I}}} - \vec{\mathbf{B}}\vec{\mathbf{B}}) \cdot \nabla)\vec{\mathbf{v}}] + [...]^t = 0. \tag{11.15}$$

Dans la dérivée temporelle, on tient compte de la dérivée du champ magnétique, $d_t\vec{\mathbf{B}} = \partial_t B + \vec{\mathbf{v}} \cdot \nabla\vec{\mathbf{B}}$, et $\partial_t B = \nabla\times\vec{\mathbf{E}} = \nabla\times(\vec{\mathbf{u}}_0 \times \vec{\mathbf{B}})$. En développant le rotationnel, $d_t\vec{\mathbf{B}} = (\vec{\mathbf{B}} \cdot \nabla)\vec{\mathbf{u}}_0 - \vec{\mathbf{B}}\nabla\nabla{\cdot}u_0$. La dérivée temporelle s'écrit

$$\begin{aligned}(d_tH_\|)\vec{\mathbf{B}}\vec{\mathbf{B}} + (d_tH_\perp)(B^2\vec{\vec{\mathbf{I}}} - \vec{\mathbf{B}}\vec{\mathbf{B}}) +\\ (H_\| - H_\perp)([\vec{\mathbf{B}}(\vec{\mathbf{B}} \cdot \nabla)\vec{\mathbf{u}}_0 - \vec{\mathbf{B}}\vec{\mathbf{B}}\nabla\nabla{\cdot}\vec{\mathbf{u}}_0] + [...]^t) + H_\perp\vec{\vec{\mathbf{I}}}\frac{dB^2}{dt}.\end{aligned}$$

On peut développer $d_tB^2 = 2\vec{\mathbf{B}}(\vec{\mathbf{B}} \cdot \nabla)\vec{\mathbf{u}}_0 + 2B^2\nabla\vec{\mathbf{u}}_0$, mais cela n'est pas necessaire *ici* pour trouver les relations CGL. L'autre terme s'écrit

$$(H_\| - H_\perp)([\vec{\mathbf{B}}(\vec{\mathbf{B}} \cdot \nabla)\vec{\mathbf{u}}_0] + [...]^t) + H_\perp B^2\nabla\vec{\mathbf{u}}_0.$$

La somme de ces deux expressions est une matrice nulle à l'ordre zéro. Comme le champ magnétique se projette sur l'axe Oz, comme les dérivées $d_tH_\|$ et $d_tH_\perp$ apparaissent sur la diagonale principale, il est intéressant de projetter ces relations sur les composantes zz, et xx et yy de la matrice. Sur la composante zz,

$$\frac{dH}{dt}_\| + H_\|(-2B^2\nabla{\cdot}\vec{\mathbf{u}}_0 + 4B^2\partial_z u_{0z}) = \frac{dH}{dt}_\| + H_\|(-2B^2\nabla{\cdot}\vec{\mathbf{u}}_0 + 4\vec{\mathbf{B}}{\cdot}(\vec{\mathbf{B}}{\cdot}\nabla)\vec{\mathbf{u}}_0) = 0. \tag{11.16}$$

Or, $\vec{\mathbf{B}}(\vec{\mathbf{B}} \cdot \nabla)\vec{\mathbf{u}}_0 = \vec{\mathbf{B}} \cdot (d_t\vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{B}}\nabla{\cdot}\vec{\mathbf{u}}_0)$, (voir le développement de $d_t\vec{\mathbf{B}}$ plus haut). En tenant compte de la conservation de la matière 11.2, on élimine la divergence de la vitesse, une dérivée totale de la densité apparaît. Il vient

$$\frac{d_tH_\|}{H_\|} - 2\frac{d_tn}{n} + 2\frac{d_tB^2}{B^2} = 0,$$

d'où $d_t(H_\|B^4/n^2) = 0$, et après retour aux variables initiales, la relation 11.11

On peut, grâce au même genre de calculs, projetter la relation de transport ded $\vec{\vec{\mathbf{H}}}$ sur les élements xx et yy. On obtient, pour l'élément xx

$$\frac{d_tH_\perp}{H_\perp} + \frac{d_tB^2}{B^2} - 2\frac{\partial}{\partial x}u_{0x} = 0.$$

On a une relation similaire pour l'élément yy, ce qui montre que la différence entre $\frac{\partial}{\partial x} u_{0x}$ et $\frac{\partial}{\partial x} u_{0x}$ n'est pas d'ordre zéro, mais un. Par addition des relations sur xx et yy, et en transformant un peu les expressions comme on l'a fait pour $H_\parallel$, on trouve

$$\frac{d_t H_\perp}{H_\perp} + \frac{1}{2} \frac{d_t B^2}{B^2} = 0.$$

Après retour aux variables initiales, on trouve la relation 11.12.

Chapitre 12

Discontinuités et frontières

12.1 Théorie MHD des discontinuités

La théorie des discontinuités en MHD consiste à supposer une couche frontière d'un plasma en équilibre, telle que les variations du plasma dans une direction donnée x sont très supérieures aux variations dans les directions perpendiculaires y, z. On ne considère alors que les variations du plasma suivant la direction x, on ne tient pas compte des opérateurs ∂_t, ∂_y, ∂_z. Cela revient donc à étudier un plasma stationnaire à une dimension. Nous allons voir qu'il est alors possible d'exprimer des relations entre les paramètres du plasma définis entre deux points P_1 et P_2 sans qu'il soit nécessaire de décrire le plasma entre ces deux points. On appelle ces relations les *équations de saut* ou les *équations de Rankine-Hugoniot*.

En fait cette théorie est une théorie générale des plasmas stationnaires à une dimension, qui n'implique nullement la nécessité d'une discontinuité. On va montrer en fait qu'il y a dans le cas 1D à l'équilibre, autant d'invariants (par rapport à un déplacement) que de paramètres physiques du plasma.

Néanmoins, c'est le cas des variations discontinues du plasma qui va principalement rendre cette étude intéressante, cette étude étant alors applicable au voisinage des discontinuités, que le plasma soit étudié à travers un modèle mono, bi ou tri-dimensionnel.

La notion de variation discontinue des paramètres MHD d'un plasma est valable du fait que la MHD se limite à une description aux grandes échelles d'un plasma. Avec des théories plus fines, incluant une description aux petites échelles spatiales, comme la théorie cinétique, les paramètres du plasma varient continuement entre les points P_1 et P_2.

Comme la théorie des discontinuités MHD concerne entre autres l'étude des chocs, il est nécessaire de prendre en compte des phénomènes de dissipation de l'énergie. On prend donc en compte l'équation (9.12) de l'énergie.

12.1.1 Détermination des équations de saut

La méthode des calculs qui vont suivre est la même pour l'obtention de toutes les équations de saut : on considère chaque équation de la MHD mise sous une forme qui fasse apparaitre seulement des dérivées partielles temporelles ou spatiales (pas de termes non dérivés). Une manière de faire est de prendre les équations sous forme conservative, mais ce n'est pas indispensable, On élimine alors tous les opérateurs différentiels sauf $\partial/\partial x$. On intègre l'équation selon la direction x entre les coordonées x_1 et x_2 des points P_1 et P_2.

On notera g_1 et g_2 toute grandeur g définie au point P_1 et P_2. La variation $g_2 - g_1$ de g entre P_1 et P_2 sera notée Δg.

Conservation de la masse De (9.1) on déduit $\frac{d(\rho v_x)}{dx} = 0$. Donc, la quantité ρv_x est constante, partout dans le plasma. En particulier $\rho_1 v_{x1} = \rho_2 v_{x2}$, c'est à dire

$$\Delta \rho v_x = 0. \tag{12.1}$$

Divergence du champ magnétique L'équation de la divergence de $\vec{\mathbf{B}}$ mène à la relation

$$\Delta B_x = 0. \tag{12.2}$$

En fait, B_x est constant en tout point du plasma. Remarquons que $\Delta B_\perp^2 = \Delta B^2$.

Equation de Faraday L'équation de Faraday prend la forme (9.4) en MHD. Pour un état d'équilibre, elle devient $\nabla \times (\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}}) = 0$, d'où, après projection sur les axes (y et z, pour x c'est trivial) et intégration le long de x entre les points P_1 et P_2

$$\Delta(v_x B_y - v_y B_x) = 0 \tag{12.3}$$

$$\Delta(v_x B_z - v_z B_x) = 0. \tag{12.4}$$

On peut écrire (12.3) et (12.4) sous forme vectorielle : on les complète par la relation triviale $\Delta(v_x B_x - v_x B_x) = 0$, et il vient

$$\Delta(v_x \vec{\mathbf{B}} - \vec{\mathbf{v}} B_x) = 0. \tag{12.5}$$

Conservation de la quantité de mouvement La relation (9.17) exprime la conservation de l'impulsion sous une forme qui ne contient que des dérivées. Les trois composantes doivent être traitées séparément. Pour la première composante,

$$\int_{x_1}^{x_2} (\rho v_x \frac{dv_x}{dx} + \frac{d}{dx}(p + \frac{B^2}{2\mu_0}))dx = 0 \tag{12.6}$$

et comme ρv_x^2 et B_x sont indépendants de x, on peut les sortir des intégrales, il vient

$$\rho v_x \Delta v_x + \Delta(p + \frac{B^2}{2\mu_0}) = 0. \tag{12.7}$$

Les équations sur les composantes y et z sont analogues, pour y :

$$\int_{x_1}^{x_2} (\rho v_x \frac{dv_y}{dx} - \frac{1}{\mu_0} B_x \frac{dB_y}{dx})dx = 0 \tag{12.8}$$

Comme précédement, on peut sortir B_x et ρv_x de l'intégrale,

$$\rho v_x \Delta v_y - \frac{B_x}{\mu_0} \Delta B_y = 0. \tag{12.9}$$

De même pour la composante z

$$\rho v_x \Delta v_z - \frac{B_x}{\mu_0} \Delta B_z = 0. \tag{12.10}$$

Conservation de l'énergie En équilibre 1D, l'équation de conservation de l'énergie (9.12) integrée entre P_1 et P_2 devient

$$\Delta[(\frac{\rho v^2}{2} + \frac{5}{2}p)v_x + q_x + \frac{v_x B^2 - B_x(\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{B}})}{\mu_0}] = 0. \tag{12.11}$$

soit, en sortant quelques grandeurs invariantes des Δ,

$$\frac{\rho v_x}{2} \Delta(v^2) + \frac{5}{2} \Delta(p v_x) + \Delta(q_x) + \frac{1}{\mu_0} \Delta(v_x B^2) - \frac{B_x}{\mu_0} \Delta(\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{B}}) = 0. \tag{12.12}$$

12.1.2 Résolution des équations de saut

Flux de chaleur On suppose que la divergence du flux de chaleur $\nabla\cdot\vec{\mathbf{q}}$ est nulle en P_1 et en P_2. Si on suppose que P_1 et P_2 sont des endroits dépourvus de forts gradients ou de variations rapides, cette hypothèse est raisonnable. Cela n'empêche pas que $\nabla\cdot\vec{\mathbf{q}}$ puisse être non nulle *dans* la discontinuité. En intégrant le long de x entre P_1 et P_2, on trouve néanmoins que

$$\Delta q_x = 0. \tag{12.13}$$

Repère de De Hoffmann-Teller Il y a 8 équations à résoudre, dont deux sont très simples ((12.4) et (12.3)). Les équations de Faray pourraient devenir triviales si la vitesse et le champ magnétique étaient parallèles. En choisissant bien un reprère en translation le long de la discontinuité, on peut permettre $\vec{\mathbf{v}}_1 \parallel \vec{\mathbf{B}}_1$.

$$v_{x1}\vec{\mathbf{B}}_1 - \vec{\mathbf{v}}_1 B_{x1} = 0 \tag{12.14}$$

ce qui implique

$$v_{x2}\vec{\mathbf{B}}_2 - \vec{\mathbf{v}}_2 B_{x2} = 0 \tag{12.15}$$

Ce changement de repère n'aura pas d'incidence sur la discontinuité, puisque la discontinuité est invariante dans le directions y et z. Du fait que la vitesse et la champ magnétique sont coplanaires, le champ électrique (9.4) sera nul. Comme dans tout changement de repère non relativiste, $\vec{\mathbf{B}}$ et p ne sont pas modifiés.

On fois qu'on est placé dans le repère de De Hoffmann-Teller, il ne reste que quatre équations non triviales : (12.7), (12.9), (12.10), et (12.12). On peut les résoudre pour la variable v_{x2}, en supposant que l'on connait tous les paramètres MHD en P_1.

Dans le repère de De Hoffmann-Teller, les deux derniers termes de l'équation de l'énergie (12.12) s'annulent. On peut le voir en multipliant (12.14) et (12.15) scalairement par $\vec{\mathbf{B}}$. On peut le comprendre plus physiquement en sachant que ces termes représentent le vecteur de Poynting $\vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{B}}/\mu_0$ (9.11), et que dans le repère de De Hoffmann-Teller, $\vec{\mathbf{E}} = 0$. Ainsi

$$\Delta[(\frac{\rho v^2}{2} + \frac{5}{2}p)v_x] = 0. \tag{12.16}$$

ou encore,

$$\frac{\rho v_x}{2}\Delta(v^2 + 5\frac{p}{\rho}) = 0. \tag{12.17}$$

Symétries La densité est positive, donc, d'après l'équation (12.1), le signe de v_x ne dépend pas de x. On supposera v_x positif.

Dans les équations qui précèdent, v_{x1} et v_{x2} jouent des rôles absolument symétriques. Comme on les a supposé positifs, il suffit de supposer $x_2 > x_1$ pour rompre la symétrie, et réduire des redondances inutiles dans les solutions. On appelera P_1 le point amont, et P_2 le point aval.

Les relations présentées dans ce chapitre n'impliquent nullement que $v_{x2} \leq v_{x1}$. Dans le cas où l'on aurait des variations continues de v_x, on ne devrait pas supposer cela *a priori*. Par contre, dans le cas où l'on trouve des discontinuités, alors, on sait que au sein de ces discontinuités, les équations de la MHD ne sont valables qu'en considérant le flux de chaleur $\vec{\mathbf{q}}$ non nul, car on a des variations aux petites échelles (infiniement petites) et que dans ce genre de cas, la MHD idéale avec des équations simples de fermeture (ici la plus simple est $\vec{\mathbf{q}} = 0$) ne s'applique pas. La théorie présentée ici est valable tant qu'on regarde à coté des discontinuités. Au sein des discontinuités, il faut regarder avec les équations cinétiques. Et l'on apprend, qu'en général, il y a une cascade de l'énergie vers les petites échelles. C'est à dire que de l'énergie est transférée vers l'énergie thermique. Analysons les relations de transfert d'énergie en MHD (9.8), (9.9), (9.10). D'après ce qu'on a vu à présent, dans le reprère de De Hoffmann-Teller, tous les termes de l'équation sur l'énergie électromagnétique (9.10) sont nuls. On en déduit que les transferts d'énergie thermique se feront à partir de l'énergie cinétique dirigée. Alors, on déduit de (9.8) et (9.9), en suivant la même méthode que pour les équations de saut,

$$v_{x2} \leq v_{x1} \quad \text{et} \quad \Delta(pv_x) \geq 0. \tag{12.18}$$

Calcul complet de la solution Le calcul pour résoudre ces équations mène à une équation du quatrième degré. Il faut des pages pour l'écrire, c'est affreux. Ensuite il faut la ŕesoudre, c'est encore pire. En fait, il y a une solution évidente $v_{x2} = v_{x1}$, qu'on peut mettre en facteur, et il reste une équation du troisème degré. C'est toujours affreux. On peut demander à un logiciel de calcul formel de le faire. G. Blemont et L. Rezeau l'on fait et ça marche. On obtient un courbe pour des paramètres en P_1 donnés, en fonction par exemple des variations de v_{1x}. Ce sont les propriétés de cette courbe que l'on va examiner. Les solutions $v_{x2} = v_{x1}$ ne sont pas toutes triviales. Elles correspondent aux discontinuités de contact, rotationnelle et tangentielle. Les solutions à $v_{x2} \neq v_{x1}$ correspondent à des chocs.

12.1.3 Quelques propriétés des chocs

C'est le cas $v_{x2} \neq v_{x1}$.

Coplanarité On peut montrer que dans ce cas, la discontinuité est coplanaire : si $B_{y1} = 0$, alors $B_{y2} = 0$. Cela n'implique nullement $\Delta B_\perp = 0$. Voici une démonstration : dans l'équation (12.3), on peut décomposer le produit

$$v_{x2}\Delta B_y + B_{y1}\Delta v_x - B_x\Delta(v_y) = 0$$

La relation (12.9) permet d'éliminer $\Delta(v_y)$,

$$(v_{x2} - \frac{B_x^2}{\rho v_x \mu_0})\Delta B_y + B_{y1}\Delta v_x = 0 \tag{12.19}$$

On a une équation analogue sur l'axe z. Supposons que $B_{y1} = 0$, alors, soit $\Delta B_y = 0$, soit $v_{x2} - B_x^2/\rho v_x \mu_0 = 0$.

- Le cas $\Delta B_y = 0$ est le plus général, il signifie que le champ magnétique ne varie que dans un plan, défini par l'axe x et un autre axe fixe, ici c'est l'axe z. Cette relation, valable aussi en z, nous montre que si le champ magnétique perpendiculaire est nul quelque part, il est nul partout.
- Le cas $v_{x2} - B_x^2/\rho v_x \mu_0 = 0$ est rès particulier, il dit que la vitesse v_x en P_2 est égale à la vitesse d'Alfven V_{Ax2} également en P_2. En déroulant un peu les calculs on peut montrer que le champ magnétique et la vitesse en P_1 sont purement perpendiculaires, c'est à dire suivant la composante en x. C'est une forme dégénérée de coplanarité.

Remarquons que l'on peut écrire aussi

$$(v_{x1} - \frac{B_x^2}{\rho v_x \mu_0})\Delta B_y + B_{y2}\Delta v_x = 0 \tag{12.20}$$

On étudie la courbe $f(v_{x2}, v_{x2})$, avec les autres paramètres en P_1 fixés.

Nombre d'intersections avec la courbe $v_{x2} = v_{x2}$ Chaque intersection correspond à une variation infinitésimale de la vitesse. Chaque intersection correspond donc à une solution linéaire. Toute solution linéaire peut être décrite comme une superposition d'ondes. Comme ici, la superposition se fait sur une longueur nulle, il faut une somme infinie d'ondes correspondant à toutes les longueurs d'ondes (c'est la théorie mathématique des transformées de Fourier des distributions qui le dit). Il faut aussi que la forme de la discontinuité ne change pas, autrement dit, il faut que ça reste une discontinuité. Pourquoi ? Parce que l'on cherche ici des solutions stationnaires. Or, pour qu'une somme (infinie) d'ondes résulte en une forme stationnaire, il faut que les ondes se propagent toutes à la meme vitesse : il faut donc additionner des ondes non dispersives ayant toutes la même vitesse. En MHD, il y a trois types d'ondes, chaque type étant non dispersif : le mode lent, le mode d'Alfvén, le mode rapide. Il y a donc trois possibilités de variation infinitésimale de la vitesse dans une discontinuité, il y a donc trois intersections au plus entre la courbe $f(v_{x2}, v_{x2})$ et la courbe $v_{x2} = v_{x2}$. Chacune de ces intersections correspond à un mode propre de la MHD. Dans le repère ou les discontinuités sont fixes, la vitesse du plasma ($v_{x1} = v_{x2}$) pour ces discontinuités infinitésimales est donc soit la vitesse du mode lent, soit la vitesse du mode d'Alfvén, soit la vitesse du mode rapide.

Solution asymptotique Que se passe-t-il quand v_{x1} tend vers l'infini ? On suppose que toutes les quantités en P_1 sont finies sauf les vitesses ; $v_{y1} = v_{y1}\tan(\theta)$ tend aussi vers l'infini. On peut écrire $v_{2x} = \alpha v_{x1}$. On développe les calculs en supposant que v_{x1} tend vers l'infini, et que α tend vers une limite a inférieure à 1 (car $v_{2x} \leq v_{x1}$). On élimine les termes en P_2 au moyen de la constante α. Il vient immédiatement $\rho_2 \sim \rho_1/a$. D'après (12.19), $B_{2y} \sim B_{1y}/a$. On en déduit $\Delta v_y \sim \frac{1-a}{a}\frac{B_x B_{y1}}{\mu_0 \rho v_x}$. On injecte ce résultat dans (12.7), on en déduit le saut de pression $\Delta p \sim (1-a)\rho v_x v_{1x} - \frac{1-a^2}{a^2}\frac{B_{1y}^2}{2\mu_0}$. On met tout cela dans l'equation de l'énergie, il y a pas mal de termes. Comme on traite de relations d'équivalence pour v_{x1} tendant vers l'infini, il suffit de garder les termes de plus haut degré en v_{x1}, les seuls qui comptent pour cette relation. Il ne reste que $(4a-1)(1-a)v_{x1}^2 \sim 0$ (on aura pris soin de transformer $v_{y1} = v_{y1}\tan(\theta)$ et d'exprimer ρv_x au point P_1). A part la relation évidente $a = 1$ qui veut dire qu'il ne se passe rien, il reste $a = 1/4$, c'est à dire que la courbe $v_{2x} = f(v_{2x})$ a une assymptote $v_{2x} \sim v_{2x}/4$.

Que se passe-t-il quand v_{x1} tend vers zéro ? On écrit de nouveau $v_{2x} = \alpha v_{x1}$ et on suppose que les autres grandeurs en P_1 sont finies. Alors ρv_x tend vers zéro. De (12.19) on déduit que $\alpha v_{x1}\Delta B_y$ tend vers l'infini. Soit α soit ΔB_y tend vers l'infini. Si ΔB_y tends vers l'infini, alors, d'après (12.7), soit p_2 tend vers $-\infty$ ce qui est impossible, soit Δv_x tend vers l'infini. On est ramené au cas $\alpha \to \infty$ c'est à dire $v_{2x} \to \infty$.

FIG. 12.1 – Allure de la courbe $f(v_{x1}, v_{x2})$. La partie de la courbe tracée en trait épais correspond aux solutions physiquement intéressantes $v_{x1} \geq v_{x2}$. Les lignes droites horizontales et verticales représentent les vitesses lente, d'Alfvén, et rapide. Entre les deux traits en pointillés, il y a pour chaque valeur de v_{x1}, trois valeurs de v_{x2}, dont deux sont physiquement intéressantes.

Topologie des solutions Le nombre de points où $dv_{x2}/dv_{x1} = 0$ est inférieur ou égal à trois. Pour démontrer cela, on dérive les relations de saut par rapport à v_{x1}, en supposant les autres grandeurs en P_1 constantes. On suppose alors $dv_{x2}/dv_{x1} = 0$, et on peut éliminer les autres dérivées des grandeurs en P_2. Il reste des termes en P_1 et B_{y2} :

$$-\rho v_x - \frac{2\rho v_x v_1 + 5p_1}{5v_{x2}} + \frac{B_{2y}B_{1y}}{\mu_0}\frac{v_{x2}}{v_{x2} - \frac{B_x^2}{\rho v_x \mu_0}} = 0.$$

A l'aide des relations de saut, on relie B_{2y} à v_{2x},

$$(v_{x2} - \frac{B_x^2}{\rho v_x \mu_0})^2(-\rho v_x v_{2x} - \frac{2\rho v_x v_1 + 5p_1}{5}) + B_{1y}(v_{x2} - \frac{B_x^2}{\rho v_x \mu_0} - v_{2x} + v_{1x}) = 0.$$

C'est une équation du troisième degré en v_{2x}, elle a donc une ou trois solutions. La courbe $f(v_{x2}, v_{x2})$ a donc une ou trois tangentes horizontales.

12.1.4 Discontinuité rotationnelle

C'est le cas $v_{x2} = v_{x1} \geq 0$.

La relation (12.1) et (12.7) nous indiquent que la densité et la pression totale $p + \frac{B^2}{2\mu_0}$ sont invariantes. La relation (12.19) est toujours valable, mais elle devient plus simple. Elle implique que soit le champ magnétique perpendiculaire est invariant, soit la vitesse v_x est liée à la vitesse d'Alfvén le long des lignes de champ. Le premier cas est la solution triviale qui correspond à aucun changement des paramètres. Le cas

$$v_x^2 = \frac{B_x^2}{\mu_0 \rho} = v_{Ax}^2 \tag{12.21}$$

caractérise vraiment les discontinuité rotationnelles. Les relations de suat sur Faraday, l'impulsion et l'énergie impliquent $(v_x/B_x)^2 - 5/\mu_0)\Delta B_\perp = 0$. La seule solution compatible avec (12.21) est

$$\Delta B_\perp^2 = 0 \text{ et } \Delta p = 0. \tag{12.22}$$

Par contre la rotation du champ magnétique perpendiculaire est libre, c'est elle qui caractérise l'amplitude de la discontinuité. C'est aussi cette propriété qui donne son nom à cette discontinuité.

Une discontinuité rotationnelle où le champ magnétique change très peu correspond à une solution linéaire des équations MHD. Le fait que le champ magnétique perpendiculaire puisse changer de direction librement, et la relation (12.21) montrent que la discontinuité rotationnelle d'amplitude infinitésimale correspond à une onde d'Alfvén (torsionnelle).

12.1.5 Discontinuité tangentielle

C'est le cas $v_{x2} = v_{x1} = 0$. La relation de Faraday (ou de De Hoffmann-Teller) impose que $B_x = 0$. Autrement dit, l'écoulement de plasma et le champ magnétique sont tangents à la discontinuité, d'où son nom de discontinuité tangentielle. La pression totale $p + \frac{B^2}{2\mu_0}$ est invariante. C'est un cas dégénéré. La variation de densité $\Delta\rho$ et de champ magnétique perpendiculaire $\Delta\vec{\mathbf{B}}_\perp$ sont libres.

Une discontinuité tangentielle d'amplitude infinitésimale correspond à une onde MHD, en propagation perpendiculaire ($\vec{\mathbf{k}} \cdot \vec{\mathbf{B}}_0 = 0$). C'est un cas dégénéré qui correspond à la fois à l'onde d'Alfvén et au mode lent. Ces deux modes ont une vitesse de propagation nulle dans le plasma (**??**,**??**), ce qui correspond bien à la condition $v_{x2} = v_{x1} = 0$.

Chapitre 13

Paramètres caractéristiques des plasmas et ordres de grandeur

13.1 Définition des paramètres caractéristiques

Fréquence plasma : fréquence des ocsillations du plasma. Ce mode d'oscillations électrostatique non (ou très peu) propagatif concentre une grande partie de l'énergie d'agitation thermique. $\omega_{pe} = \sqrt{ne^2/\epsilon_0 m_e}$. Numériquement : $\omega_{pe} = 56.\sqrt{n}$ en s^{-1}, et $f_{pe} = 9\sqrt{n}$ Hz, où n est en m^{-3}.

Longueur de Debye : longueur d'écrantage des effets individuels. Au delà de quelques longueurs de Debye (décroissance exponentielle), les effets collectifs du plasma l'emportent sur les effets dùs aux interactions binaires entre particules, ou entre un plasma et une paroi. $\lambda_D = \sqrt{kT/ne^2}$. Numériquement : $\lambda_D = 69\sqrt{T/n}$ où la densité électronique n est en m^{-3}, la température en Kelvins, et λ_D en mètres. Ou bien, si on compte les longueurs (et les volumes) en centimètres $\lambda_D = 6.90\sqrt{T/n}$. Avec un température en eV, et des longueurs en centimètres $\lambda_D = 740\sqrt{T/n}$.

Paramètre de plasma : c'est l'inverse du nombre de particules de plasma dans une sphère de Debye, $g = 1/n\lambda_D$. L'écrantage de Debye n'a de sens statistique dans le plasma que si il y a de nombreuses particules dans une sphères de Debye, c'est à dire si $g \ll 1$. Si g n'est pas grand devant l'unité, le calcul de l'effet d'écran est faux car on ne peut pas utiliser les répartitions statistiques données par la fonction de distribution. Alors, dans ce cas, il faut considérer la mouvement de chaque particule, et son interaction avec toutes le particules du système, même les particules éloignées. Certaines personnes considèrent qu'un gaz ionisé n'est un plasma que si $g \gg 1$.

Vitesse thermique : second moment de la fonction de distribution d'une population s de particules donnée. Elle permet de définir la température de cette population $v_{ts} = \sqrt{2T_s/m_s}$ où T_s est la température comptée en unités d'énergie (c'est à dire $K\theta$ où K est la constante de Boltzmann, et θ la température en Kelvins). Pour les électrons, $v_{te} = 593\sqrt{T}$, pour une vitesse thermique en km/s et T en eV. $v_{te}/c = 0,00197\sqrt{T}$, pour des protons $v_{tH+}/c = 46\ 10^{-6}\sqrt{T}$, avec toujours T en eV.

La **girofréquence** (ou gyrofréquence si on préfère les racines greques aux racines latines) est la fréquence de rotation d'une particule sous l'effet d'un champ magnétique local. On l'appelle aussi la fréquence cyclotronique, d'où la notation ω_c. Dans le cas d'une particule non relativiste, ω_c ne dépend que du champ magnétique et des charge et masse de la particule : $\omega_c = eB/m$. Pour un électron, numériquement $f_{ce} = \omega_{ce}/2\pi = 28$ GHz/T $= 28$ Hz/nT. Pour un proton $f_{cH^+} = 1.52\,10^{-2}Hz/nT$. Dans le cas relativiste, cette formule est valable si on tient compte de la variation de la masse de la particule, ou bien, si m_0 est la masse au repos, $\omega_c = eB/\gamma m_0$. Dans le cas relativiste, la girofréquence dépend donc de l'énergie totale de la particule, ce qui n'est pas le cas pour des particules non-relativistes.

Le **rayon de Larmor** est le rayon de rotation d'une particule dans un champ magnétique, $\rho_L = v_\perp/\omega_c = p_\perp/eB$; (cette dernière expression relation est valable dans le cas relativiste, pas la première). Le rayon de Larmor caractéristique d'une population de particules dans un plasma est défini en remplaçant la vitesse $v_\perp$ par la vitesse thermique perpendiculaire $\rho_L = v_{t\perp}/\omega_c$. Pour les électrons, $\rho_{L,e} = 94380\sqrt{T_{e\perp}}/f_{ce}$, pour ρ_{Le} en m avec T en eV, et f_{ce} en Hz. $\rho_{L,e} = 3.38\,10^3\sqrt{E}/B$, en mètres, avec E en eV, et B en nT. Pour un proton $\rho_{L,H^+} = 144\,10^3\sqrt{E}/B$

La **vitesse d'Alfven** dépend du champ magnétique qui règne dans le plasma $\vec{\mathbf{V}}_A = \vec{\mathbf{B}}/(\rho\mu_o)^{1/2}$. Cette grandeur est la vitesse de phase des ondes d'Alfvén (du moins dans le cadre de l'approximation MHD). La vitesse d'Alfvén intervient d'une façon beaucoup plus générale dans les calculs sur les phénomènes de basse fréquence. Quelques relations : $V_A/c = \omega_{ci}/\omega_{pi} = 7,28(\mu n_i)^{-1/2}n_iB$ avec n_i en cm^{-3} et B en quoi ?

La **vitesse du son** C_s est la vitesse de propagation des ondes sonores. Elee dépend fortement de la relation entre la pression $\vec{\mathbf{p}}$ du plasma et sa densité ρ, c'est à dire de l'équation d'état. Dans le cas d'une description fluide (MHD, multi-fluide etc), cette équation n'est pas connue, mais on ferme souvent les équations fluides en définissant plus ou moins arbitrairement une équation d'état du plasma. Par exemple, une façon de fermer les équations de la MHD (voir section 9.4) consiste à dire que la pression est isotrope et ne dépend que de la densité $p = f(\rho)$; alors, la vitesse du son est la dérivée $C_s = f'(\rho)$. La vitesse du son peut intervenir dans toutes les descriptions des plasmas où la pression (ou la température qui y est étroitement liée) est prise en compte. La vitesse du son C_s n'interviendra donc pas dans la théorie des plasmas froids (chapitre 10 par exemple).

La **longueur d'inertie** c/ω_{pe} est la longueur typique qu'une onde lumineuse peut parcourir dans un plasma avant d'interagir avec lui. En effet, cette onde se propage à la vitesse c et il faut un temps de l'ordre de ω_{pe} pour que les électrons (les particules ayant le moins d'inertie) soient mis en mouvement par le champ électrique de l'onde. Cette grandeur intervient dans de nombreux calculs ou les phénomènes de haute fréquence sont pris en compte. On ne verra donc pas de c/ω_{pe} dans les calculs de la théorie MHD, mais on les verra apparaître dans les calculs où les électrons sont traités séparément des ions, avec une masse finie (équations multi-fluides, théorie cinétique) et où les dérivées temporelles dans les équations de Maxwell sont toutes prises en compte (ce qui exclu la MHD-Hall bien que les électrons soient pris en compte dans cette théorie).

Le β **du plasma** est le rapport entre la pression cinétique du plasma et la pression magnétique $\beta = 2\mu_0 p/B^2$. On peut définir des variantes de ce coefficient tels le $\beta_s = 2\mu_0 p_s/B^2$ associé à une espèce ou une population s de particules, ou le $\beta_\perp = 2\mu_0 p_\perp/B^2$ et le $\beta_\parallel = 2\mu_0 p_\parallel/B^2$ respectivement associés à la pression dans les directions perpendiculaire et parallèlle au champ magnétique ambiant. Les plasmas à β faibles sont très magnétisés, ces plasmas ont tendance à "suivre" l'évolution des lignes de champ. Pour ces plasmas, on peut faire diverses approximations. Par exemple, si un plasma à β faible est peu dense, de façon que l'on puisse négliger aussi les effets de charge d'espace, on pourra décrire son évolution en se contentant de calculer la trajectoire de ses particules dans le champ magnétique extérieur imposé (calcul non-auto-cohérent). Une approximation (pour des calculs auto-cohérents) consiste à considérer que le mouvement des électrons ne se fait que le long des lignes de champ magnétique, ou bien (mieux mais plus difficile) en conservant les invariants adiabatiques. Pour les plasmas a β fort, c'est le mouvement du fluide qui domine, et le champ magnétique a tendance à "suivre" le plasma. Ici, un calcul non auto-cohérent ramenant le plasma à un sytème de charges dans un champ magnétique imposé ne se justifiera jamais. Pour les électrons, posons $T = \alpha m v_{te}^2$, avec $\alpha = 1$ ou $1/2$ suivant la définition de la vitesse thermique. Alors, $\beta_e = 2\alpha(\omega_{pe}/\omega_{ce})^2(v_{te}/c)^2$. Pour les ions $\beta_i = (v_{ti}/V_A)^2 = 2\alpha(T_i/T_e)(v_{te}/c)^2(\omega_{pe}/\omega_{ce})^2$.

13.2 Les ordres de grandeurs pour des plasmas spatiaux

13.2.1 Atmosphère du Soleil

Photosphère

Chromosphère

Couronne interne

Couronne externe

13.2.2 Vent solaire

sources : notes de G. Belmont d'après des données Helios 1,2.

Vent solaire rapide au niveau de la Terre (1 UA)

Les ions sont essentiellement des protons. Ils ont les caractéristiques suivantes : une densité $n_i = 3$ cm^{-3}, une vitesse dirigée $v_i = 700$ km/s, une température $T_i = 20$ eV, une vitesse thermique $v_{ti} = 60$ km/s, une pression $p_i = 60$ eV . cm^{-3}, un champ magnétique $B = 3$ nT, pression magnétique 22 eV . cm^{-3}, $\beta_i = 3$.

Vent solaire lent au niveau de la Terre (1 UA)

Les ions sont essentiellement des protons. Ils ont les caractéristiques suivantes : une densité $n_i = 10$ cm^{-3}, une vitesse dirigée $v_i = 400$ km/s, une température $T_i = 5$ eV, une vitesse thermique $v_{ti} = 30$ km/s, une pression $p_i = 50$ eV . cm^{-3}, un champ magnétique $B = 3$ nT, pression magnétique 22 eV . cm^{-3}, $\beta_i = 2$.

Vent solaire rapide à 0,3 UA

Les ions sont essentiellement des protons. Ils ont les caractéristiques suivantes : une densité $n_i = 30$ cm^{-3}, une vitesse dirigée $v_i = 700$ km/s, une température $T_i = 80$ eV, une vitesse thermique $v_{ti} = 120$ km/s, une pression $p_i = 2,4$ keV . cm^{-3}, un champ magnétique $B = 30$ nT, pression magnétique 2,2 keV . cm^{-3}, $\beta_i = 1$.

Vent solaire lent à 0,3 UA

Les ions sont essentiellement des protons. Ils ont les caractéristiques suivantes : une densité $n_i = 100$ cm^{-3}, une vitesse dirigée $v_i = 400$ km/s, une température $T_i = 20$ eV, une vitesse thermique $v_{ti} = 60$ km/s, une pression $p_i = 2$ keV . cm^{-3}, un champ magnétique $B = 30$ nT, pression magnétique 2,2 keV . cm^{-3}, $\beta_i = 1$.

Vent solaire à 4 Rayons Solaires

Un rayon solaire $R_S = 700000$km. Caractéristiques des électrons : une densité $n_e = 10^{11}$ m^{-3}=10^5 cm^{-3}, une vitesse dirigée $v_e = 100$ km/s, une température $T_e = 100$ eV, une vitesse thermique $v_{te} = 4000$ ou 6000 km/s. Longueur de Debye $\lambda_{De} = 0,2$ m. Fréquences plasma $f_{pe} = 3$ MHz, $f_{pi} = 70$ kHz. Pour les ions, $T_i \geq 100$ eV est inconnue, $v_{ti} \geq 100$ km/s.

Le champ magnétique $B = 13$ μT= 13 000 nT. Fréquences cyclotroniques $f_{ce} = 370$ kHz, $f_{ci} = 200$ Hz Rayons de Larmor $\rho_e = 2m$, $\rho_i \sim 80m$. Pour les ions, $T_i \geq 100$ eV est inconnue.

13.2.3 Magnétosphère terrestre

sources : notes de G. Belmont.

Magnétogaine

Les ions, essentiellement des protons ont les caractéristiques suivantes : une densité $n_i = 10 - 30$ cm^{-3}, une vitesse dirigée $v_i = 100$ km/s, une température $T_i = 200$ eV, une vitesse thermique $v_{ti} = 200$ km/s, une pression $p_i = 6$ keV . cm^{-3}, un champ magnétique $B = 40$ nT (pression magnétique 4 keV . cm^{-3}), $\beta_i \geq 1$.

Magnétosphère externe

Les ions, essentiellement des protons ont les caractéristiques suivantes : une densité $n_i = 2$ cm^{-3}, une vitesse dirigée $v_i = 10$ km/s, une température

$T_i = 2$ keV, une vitesse thermique $v_{ti} = 600$ km/s, une pression $p_i = 4$ keV . cm^{-3}, un champ magnétique $B = 50$ nT (pression magnétique 6 keV . cm^{-3}), $\beta_i \leq 1$.

Lobes

Le cahmp magnétique varie de 20–30 nT pour 20 R_E à 5–10 nT pour 200 R_E. La densité de plasma est la plus basse de la magnétosphère ($n_e \sim$ 0.01–0.1 cm^{-3}, $T_e \sim 1$ keV à 100 R_E). Flux de vitesse dirigées vers la queue parfois observés (100–300 km/s). On peut trouver du plasma plus froid, venant vraissemblablement du vent solaire. La température des lobes décroit quand on s'approche de la magnétopause. Sources :voir glossaire.

Plasmasphère

Les ions, essentiellement des protons ont les caractéristiques suivantes : une densité $n_i = 100$ cm^{-3}, une vitesse dirigée $v_i = 2$ km/s, une température $T_i = 1$ eV, une vitesse thermique $v_{ti} = 10$ km/s, une pression $p_i = 100$ eV . cm^{-3}, un champ magnétique $B = 300$ nT (pression magnétique 200 keV . cm^{-3}), $\beta_i = 5\dot{1}0^{-4}$.

Zone aurorale vers 10.000km

$B = 7.5\mu T$ à 10 000km et latitude de 70 degrés (formule du dipôle magnétique). Densité : $n_e \sim 1 - 10$ cm^{-3} suivant qu'on est dans ou hors une cavité. Température : ionosphérique 1 eV, magnétosphérique, 1keV dans les cas ded populations accélérées. Sinon, typiquement $T_e = 1 - 10$eV, $\lambda_D \sim 2 - 20$m, $n \sim 10^6 - 10^7$m^{-3}. Pour les protons $\omega_{ci} = 30$Hz, $c_s \sim 5 - 50$km.s^{-1}, courants de Birkeland (Viking, 13 000 km) 0,1μA m^{-2} à grande échelle (sur 8 km), 8μA m^{-2}. Dans le cas $T_e = 10$eV, $n_e \sim 1$ cm^{-3}, on trouve $\omega_{pe} = 56.10^3$s^{-1}, $\omega_{ce} = 1,3.10^6$s^{-1}, $\omega_{ce}/\omega_{pe} = 23$, $v_{te} = 1,8.10^6$ms^{-1} $= 0,006c$, et $\beta_e = 6.10^{-6} << m_e/m_p$, et sous réserve que $T_i = T_e$, $v_{te}/V_A \sim 0,1$.

Zone aurorale vers 800-2.500km

$n \sim 1000 - 4000$cm^{-3} (2500km). Courants de Birkeland (800km) $2 - 4\mu$A m^{-2}.

13.2.4 Ionosphère terrestre

Ionosphère, couche F (300 km)

Densité $n_e \sim 3\ 10^5$ cm^{-3}, température $T_e \sim$ 0,1 eV (1000 K). Fréquence plasma $f_{pe} \sim 10^7$ Hz, longueur de Debye $\lambda_D \sim$ 0,3 cm. Source : cours de Drawin du DEA PGP.

Les ions, essentiellement des protons ont les caractéristiques suivantes : une densité $n_i = 5\ 10^5$ cm^{-3}, une vitesse dirigée $v_i = 0.5$ km/s, une température $T_i = 0,07$ eV, une vitesse thermique $v_{ti} = 1$ km/s, une pression $p_i = 35$ keV . cm^{-3}, un champ magnétique $B = 3\ 10^4$ nT (pression magnétique 2 MeV . cm^{-3}), $\beta_i = 10^{-5}$. Source : G. Belmont.

Ionosphère, couche D (70 km)

C'est un gaz faiblement ionisé et collisionnel, il est en marge de ce qui est considéré dans ces notes. Densité $n_e \sim 1000$ cm^{-3}, température $T_e \sim$ 0,022 eV. Fréquence plasma $f_{pe} \sim 30\ 10^9$ Hz, longueur de Debye $\lambda_D \sim 3$ cm. Source : cours de Drawin du DEA PGP.

13.3 Des ordres de grandeurs pour les plasmas de fusion

13.3.1 plasma produit par laser

Densité $n_e \sim 10^{19}$ cm^{-3}, température $T_e \sim 10$ eV. Fréquence plasma $f_{pe} \sim 3\ 10^{13}$ Hz, longueur de Debye $\lambda_D \sim 10^{-6}$ cm. Source : cours de Drawin du DEA PGP.

13.4 Plasmas non collisionnels ou presque produits dans des caissons

13.5 Matière dense

Electrons dans les métaux

Densité $n_e \sim 10^{23}$ cm^{-3}, température $T_e \sim 0.02$ eV (température sur Terre, genre 300 K). Fréquence plasma $f_{pe} \sim 3\ 10^{15}$ Hz, longueur de Debye $\lambda_D \sim 10^{-10}$ cm. Source : cours de Drawin du DEA PGP.

Intérieur des étoiles

Densité $n_e \sim 10^{27}$ cm^{-3}, température $T_e \sim 2$ keV. Fréquence plasma $f_{pe} \sim 3\ 10^{17}$ Hz, longueur de Debye $\lambda_D \sim 10^{-10}$ cm. Source : cours de Drawin du DEA PGP.

Intérieur des naines blanches

Densité $n_e \sim 10^{32}$ cm^{-3}, température $T_e \sim 1$ keV. Fréquence plasma $f_{pe} \sim 10^{20}$ Hz, longueur de Debye $\lambda_D \sim 10^{-12}$ cm. Source : cours de Drawin du DEA PGP.

Annexe A

Relations utiles

A.1 Identités vectorielles

$$\frac{1}{2}\nabla(\vec{\mathbf{A}}^2) = (\vec{\mathbf{A}}\cdot\nabla)\vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{A}}\times(\nabla\times\vec{\mathbf{A}}). \tag{A.1}$$

A.2 Dérivées vectorielles

$$\begin{aligned}
\nabla\cdot(\phi\vec{\mathbf{A}}) &= (\nabla\phi)\cdot\vec{\mathbf{A}} + \phi(\nabla\cdot\vec{\mathbf{A}})\\
\nabla\times(\phi\vec{\mathbf{A}}) &= (\nabla\phi)\times\vec{\mathbf{A}} + \phi(\nabla\times\vec{\mathbf{A}})\\
\nabla\cdot(\vec{\mathbf{A}}\times\vec{\mathbf{B}}) &= \vec{\mathbf{B}}\cdot(\nabla\times\vec{\mathbf{A}}) - \vec{\mathbf{A}}\cdot(\nabla\times\vec{\mathbf{B}})\\
\nabla\times(\vec{\mathbf{A}}\times\vec{\mathbf{B}}) &= (\vec{\mathbf{B}}\cdot\nabla)\vec{\mathbf{A}} - (\vec{\mathbf{A}}\cdot\nabla)\vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{A}}(\nabla\cdot\vec{\mathbf{B}}) - \vec{\mathbf{B}}(\nabla\cdot\vec{\mathbf{A}})\\
\nabla(\vec{\mathbf{A}}\cdot\vec{\mathbf{B}}) &= (\vec{\mathbf{B}}\cdot\nabla)\vec{\mathbf{A}} + (\vec{\mathbf{A}}\cdot\nabla)\vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{B}}\times(\nabla\times\vec{\mathbf{A}}) + \vec{\mathbf{A}}\times(\nabla\times\vec{\mathbf{B}}) \qquad (A.2)\\
\nabla\cdot\nabla\phi &= \nabla^2\phi = \Delta\phi\\
\nabla\cdot\nabla\times\vec{\mathbf{A}} &= 0\\
\nabla\times\nabla\phi &= 0\\
\nabla\times(\nabla\times\vec{\mathbf{A}}) &= \nabla(\nabla\cdot\vec{\mathbf{A}}) - \nabla^2\vec{\mathbf{A}}
\end{aligned}$$

Issu de Wikipédia

So the time derivative becomes :

$$\dot{A} = \hat{\boldsymbol{r}}(\dot{A}_r - A_\theta\dot{\theta} - A_\phi\dot{\phi}\sin\theta) + \hat{\boldsymbol{\theta}}(\dot{A}_\theta + A_r\dot{\theta} - A_\phi\dot{\phi}\cos\theta) + \hat{\boldsymbol{\phi}}(\dot{A}_\phi + A_r\dot{\phi}\sin\theta + A_\theta\dot{\phi}\cos\theta) \tag{A.3}$$

A.3 Intégration

A.3.1 Intégrales de volume/surface

Soit un volume V limité par une surface fermée S. Soit $\vec{\mathbf{A}}$ une fonction vectorielle dérivable, de dérivées continues. Soit $\vec{\mathbf{n}}$ le vecteur normal à la surface S, orienté vers l'extérieur de S

Théorème d'Ostrogradski, ou divergence de Gauss :

$$\int_V \nabla \cdot \vec{\mathbf{A}}\, dV = \int_S \vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{n}}\, dS = \int_S \vec{\mathbf{A}} \cdot d\vec{\mathbf{S}}. \tag{A.4}$$

Première identité de Green

$$\int_V [\phi \nabla^2 \psi + (\nabla \phi) \cdot (\nabla \psi)]\, dV = \int_S (\phi \nabla \psi) \cdot d\vec{\mathbf{S}}. \tag{A.5}$$

Seconde identité de Green, formule de Green, ou encore intégrale du pyromètre syldave :

$$\int_V (\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi)\, dV = \int_S (\phi \nabla \psi - \psi \nabla \phi) \cdot d\vec{\mathbf{S}}. \tag{A.6}$$

Théorème de la castagnette brisée, ou intégrale de Nablinin-Vectorski :

$$\int_V \nabla \times \vec{\mathbf{A}}\, dV = \int_S \vec{\mathbf{n}} \times \vec{\mathbf{A}}\, dS = \int_S d\vec{\mathbf{S}} \times \vec{\mathbf{A}}. \tag{A.7}$$

Formule générale, ici ϕ est vectorielle ou scalaire, selon l'opérateur $\diamond$ qui peut être un produit scalaire, vectoriel ou ordinaire,

$$\int_V \nabla \diamond \phi\, dV = \int_S \vec{\mathbf{n}} \diamond \phi\, dS \int_S d\vec{\mathbf{S}} \diamond \phi. \tag{A.8}$$

Forme intégrale de l'opérateur nabla (∇)

$$\nabla \diamond = \lim_{\delta V \to 0} \frac{1}{\delta V} \int_S d\vec{\mathbf{S}} \diamond \tag{A.9}$$

A.3.2 Intégrale de surface/contour

Soit un contour fermé C parcouru dans le sens direct : un petit bonhome se déplaçant dans le sens direct de C a la tête orientée dans le sens du vecteur normal $\vec{\mathbf{n}}$, et voit la surface à sa gauche. Théorème de Stokes,

$$\int_C \vec{\mathbf{A}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = \int_S (\nabla \times \vec{\mathbf{A}}) \cdot \vec{\mathbf{n}} dS = \int_S (\nabla \times \vec{\mathbf{A}}) \cdot d\vec{\mathbf{S}} \tag{A.10}$$

Théorème de Green dans le plan, ici, comme le nom l'indique, on se place dans un plan euclidien

$$\int_C A dx + B dy = \int_S (\partial_x B - \partial_y A)\, dx\, dy \tag{A.11}$$

Théorème général

$$\int_C d\vec{\mathbf{r}} \diamond \phi = \int_S (\vec{\mathbf{n}} \times \nabla) \diamond \phi dS = \int_S (d\vec{\mathbf{S}} \times \nabla) \diamond \phi \tag{A.12}$$

A.4 Changement de coordonées

A.5 Dérivées spatiales

A.5.1 Dérivées spatiales en coordonnées cylindriques

On note r, θ, z les coordonées polaires, et $\vec{\mathbf{u}}_r, \vec{\mathbf{u}}_\theta, \vec{\mathbf{u}}_z$ les vecteurs unitaires associés. Un vecteur $\vec{\mathbf{a}}$ en coordonnées polaires est défini par $\vec{\mathbf{a}} = a_r \vec{\mathbf{u}}_r +$

$a_\theta \vec{\mathbf{u}}_\theta + a_z \vec{\mathbf{u}}_z$.

$$\nabla f = \partial_r f \vec{\mathbf{u}}_r + \frac{1}{r}\partial_\theta f \vec{\mathbf{u}}_\theta + \partial_z f \vec{\mathbf{u}}_z \quad \text{(A.13)}$$

$$\nabla \cdot \vec{\mathbf{a}} = \frac{1}{r}\partial_r(r a_r) + \frac{1}{r}\partial_\theta a_\theta + \partial_z a_z \quad \text{(A.14)}$$

$$\nabla \times \vec{\mathbf{a}} = (\frac{1}{r}\partial_\theta a_z - \partial_z a_\theta)\vec{\mathbf{u}}_r + (\partial_z a_r - \partial_r a_z)\vec{\mathbf{u}}_\theta + \frac{1}{r}(\partial_r(r a_\theta) - \partial_\theta a_r)\vec{\mathbf{u}}_z \quad \text{(A.15)}$$

$$\nabla^2 f = \partial^2_{r^2} f + \frac{1}{r}\partial_r f + \frac{1}{r^2}\partial^2_{\theta^2} f + \partial^2_{z^2} f \quad \text{(A.16)}$$

$$(\vec{\mathbf{a}} \cdot \nabla\vec{\mathbf{b}})_r = a_r\partial_r b_r + \frac{a_\theta}{r}\partial_\theta b_r + a_z\partial_z b_r - \frac{a_\theta b_\theta}{r} \quad \text{(A.17)}$$

$$(\vec{\mathbf{a}} \cdot \nabla\vec{\mathbf{b}})_\theta = a_r\partial_r b_\theta + \frac{a_\theta}{r}\partial_\theta b_\theta + a_z\partial_z b_\theta + \frac{a_\theta b_r}{r} \quad \text{(A.18)}$$

$$(\vec{\mathbf{a}} \cdot \nabla\vec{\mathbf{b}})_z = a_r\partial_r b_z + \frac{a_\theta}{r}\partial_\theta b_z + a_z\partial_z b_z \quad \text{(A.19)}$$

$$(\nabla^2\vec{\mathbf{a}})_r = \nabla^2 a_r - \frac{2}{r^2}\partial_\theta a_\theta - \frac{a_r}{r^2} \quad \text{(A.20)}$$

$$(\nabla^2\vec{\mathbf{a}})_\theta = \nabla^2 a_\theta + \frac{2}{r^2}\partial_\theta a_r - \frac{a_\theta}{r^2} \quad \text{(A.21)}$$

$$(\nabla^2\vec{\mathbf{a}})_z = \nabla^2 a_z \quad \text{(A.22)}$$

A.5.2 Dérivées spatiales en coordonnées sphériques

$$
\begin{aligned}
\nabla f &= \partial_r f \vec{\mathbf{u}}_r + \frac{1}{r}\partial_\theta f \vec{\mathbf{u}}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\partial_\phi f \vec{\mathbf{u}}_\phi && \text{(A.23)}\\
\nabla \cdot \vec{\mathbf{a}} &= \frac{1}{r^2}\partial_r(r^2 a_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\partial_\theta(a_\theta \sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\partial_\phi(a_\phi) && \text{(A.24)}\\
\nabla \cdot \vec{\mathbf{a}} &= \frac{2a_r}{r} + \partial_r a_r + \frac{a_\theta}{r\tan\theta} + \frac{1}{r}\partial_\theta a_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\partial_\phi a_\phi && \text{(A.25)}\\
\nabla \times \vec{\mathbf{a}} &= \frac{1}{r^2\sin\theta}[\{\partial_\theta(r a_\phi \sin\theta)\partial_\phi(r a_\theta)\}\vec{\mathbf{u}}_r \\
&\quad +\{\partial_\phi a_r - \partial_r(r\sin\theta a_\phi)\} r\vec{\mathbf{u}}_\theta \\
&\quad +\{\partial_r(r a_\theta) - \partial_\theta a_r\} r\sin\theta \vec{\mathbf{u}}_\phi] && \text{(A.26)}\\
\nabla^2 f &= \frac{1}{r^2}\partial_r(r^2\partial_r f) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\partial_\theta(\sin\theta\partial_\theta f) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\partial^2_{\phi^2} f && \text{(A.27)}\\
(\vec{\mathbf{a}}\cdot\nabla\vec{\mathbf{b}})_r &= a_r\partial_r b_r + \frac{a_\theta}{r}\partial_\theta b_r + \frac{a_\phi}{r\sin\theta}\partial_\phi b_r - \frac{a_\theta b_\theta + a_\phi b_\phi}{r} && \text{(A.28)}\\
(\vec{\mathbf{a}}\cdot\nabla\vec{\mathbf{b}})_\theta &= a_r\partial_r b_\theta + \frac{a_\theta}{r}\partial_\theta b_\theta + \frac{a_\phi}{r\sin\theta}\partial_\phi b_\theta + \frac{a_\theta b_r - \cot\theta a_\phi b_\phi}{r} && \text{(A.29)}\\
(\vec{\mathbf{a}}\cdot\nabla\vec{\mathbf{b}})_\phi &= a_r\partial_r b_\phi + \frac{a_\theta}{r}\partial_\theta b_\phi + \frac{a_\phi}{r\sin\theta}\partial_\phi b_\phi + \frac{a_\phi b_r + \cot\theta a_\phi b_\theta}{r} && \text{(A.30)}\\
(\nabla^2\vec{\mathbf{a}})_r &= \nabla^2 a_r - \frac{2}{r^2}(a_r + \partial_\theta a_\theta + \cot\theta\, a_\theta) - \frac{2}{r^2\sin\theta}\partial_\phi a_\phi && \text{(A.31)}\\
(\nabla^2\vec{\mathbf{a}})_\theta &= \nabla^2 a_\theta + \frac{2}{r^2}\partial_\theta a_r - \frac{1}{r^2\sin^2\theta}(a_\theta + 2\cos\theta\,\partial_\phi a_\phi) && \text{(A.32)}\\
(\nabla^2\vec{\mathbf{a}})_\phi &= \nabla^2 a_\phi + \frac{1}{r^2\sin\theta}\partial_\phi a_r + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}(-a_\phi + 2\cos\theta\,\partial_\phi a_\theta) && \text{(A.33)}
\end{aligned}
$$

A.6 Coordonnées curvilignes orthogonales

Ce paragraphe vient de l'article "orthogonal coordinates" de Wikipedia.

$$d\mathbf{r} = \sum_{k=1}^{D} h_k dq_k \mathbf{e}_k \qquad \text{(A.34)}$$

where the $\mathbf{e}_k$ are the unit vectors normal to their respective surfaces of constant qk. These unit vectors are tangent to the coordinate lines and form the coordinate axes of a local Cartesian coordinate system.

The formulae for the vector dot product and vector cross product remain the same in orthogonal coordinate systems, e.g.,

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=\sum_{k=1}^{D} A_k B_k \tag{A.35}$$

Thus, a line integral along a contour $\mathcal{C}$ in orthogonal coordinates equals

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\sum_{k=1}^{D}\int_{\mathcal{C}} F_k h_k dq_k \tag{A.36}$$

where Fk is the component of the vector $\mathbf{F}$ in the direction of the kth unit vector $\mathbf{e}_k$

$$Fk \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathbf{e}_k\cdot\mathbf{F} \tag{A.37}$$

Similarly, an infinitesimal element of area $dA = ds_i ds_j = h_i h_j dq_i dq_j$ (where $i \neq j$) and the infinitesimal volume $dV = ds_i ds_j ds_k = h dq_i dq_j dq_k$, where $h \stackrel{\mathrm{def}}{=} h_i h_j h_k$ and $i \neq j \neq k$. For illustration, a surface integral over a surface $\mathcal{S}$ in three-dimensional orthogonal coordinates equals

$$\int_{\mathcal{S}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{A}=\int_{\mathcal{S}} F_1 h_2 h_3 dq_2 dq_3+\int_{\mathcal{S}} F_2 h_3 h_1 dq_3 dq_1+\int_{\mathcal{S}} F_3 h_1 h_2 dq_1 dq_2 \tag{A.38}$$

Gradient, laplacien, divergence, rotationnel dans un espace tridimensionnel,

$$\begin{aligned}
\nabla\Phi &= \frac{\mathbf{e}_1}{h_1}\frac{\partial\Phi}{\partial q_1}+\frac{\mathbf{e}_2}{h_2}\frac{\partial\Phi}{\partial q_2}+\frac{\mathbf{e}_3}{h_3}\frac{\partial\Phi}{\partial q_3} \\
\nabla^2\Phi &= \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial\Phi}{\partial q_1}\right)+\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{h_3h_1}{h_2}\frac{\partial\Phi}{\partial q_2}\right)+\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial\Phi}{\partial q_3}\right)\right] \\
\nabla\cdot\mathbf{F} &= \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(F_1h_2h_3)+\frac{\partial}{\partial q_2}(F_2h_3h_1)+\frac{\partial}{\partial q_3}(F_3h_1h_2)\right] \\
\nabla\times\mathbf{F} &= \frac{\mathbf{e}_1}{h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_2}(h_3F_3)-\frac{\partial}{\partial q_3}(h_2F_2)\right]+\frac{\mathbf{e}_2}{h_3h_1}\left[\frac{\partial}{\partial q_3}(h_1F_1)-\frac{\partial}{\partial q_1}(h_3F_3)\right] \\
&\quad+\frac{\mathbf{e}_3}{h_1h_2}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(h_2F_2)-\frac{\partial}{\partial q_2}(h_1F_1)\right]
\end{aligned} \tag{A.39}$$

A.7 Quelques intégrales

Celle-ci est inévitable dès les premières applications de la théorie cinétique, la forme est simple mais le calcul demande de la ruse ($\alpha > 0$) :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\alpha x^2) dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \tag{A.40}$$

$$\int_{0}^{+\infty} \exp(-\alpha x^2) dx = \sqrt{\frac{\pi}{4\alpha}} \tag{A.41}$$

$$\tag{A.42}$$

Une autre, dans la même famille, (3-462-2 dans le Gradstein et Rysik)

$$S_{n,p,q} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n \exp\left(-px^2 + 2qx\right) = \frac{1}{2^{n-1}p}\sqrt{\frac{\pi}{p}}\frac{d^{n-1}}{dq^{n-1}}(q \exp(\frac{q^2}{p})) \tag{A.43}$$

Dans le cas où $n = 0$, cette relation est analogue à la numéro (3.323-2) du même ouvrage (attention $p > 0$ et q ne jouent pas le même rôle)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-p^2x^2 \pm qx\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{p} \exp(\frac{q^2}{4p^2})). \tag{A.44}$$

A.8 Unités barbares

Champ magnétique, Gauss, gammas et Teslas :

$$\begin{aligned} 1G &= 10^{-4}T = 10^5 nT. \\ 1\gamma &= 1nT. \\ 1T &= 10^4 G. \end{aligned}$$

Unités d'énergie

$$1erg = 10^{-7}J.$$

Index